Zmaturuj!

z matematiky

Sprievodca stredoškolským učivom matematiky

Príprava na maturitu (i na novú podobu maturity)

Príprava na prijímacie skúšky na vysoké školy

Pre študentov stredných škôl a ich učiteľov

Didaktis

4.A SAŠA JASENKOVÁ

Obsah knihy

0. Základy matematickej logiky. Množiny

Obsah kapitoly:

Výroky

VÝROKOM je každá oznamovacia veta, o ktorej má zmysel hovoriť, či je pravdivá (pravdivostnú hodnotu výroku je pravda označujeme 1) alebo nie (pravdivostnú hodnotu výroku je nepravda označujeme 0). Výroky sa označujú veľkými písmenami $A, B, \dots, Z$.

Z jednoduchých výrokov sa dajú pomocou logických spojok tvoriť VÝROKY ZLOŽENÉ:

$A \wedge B$ je KONJUNKCIA VÝROKOV

$A \vee B$ je ALTERNATÍVA (DISJUNKCIA) VÝROKOV

$A \Rightarrow B$ je IMPLIKÁCIA VÝROKOV

$A \Leftrightarrow B$ je EKVIVALENCIA VÝROKOV

Príkladom výroku je veta *Dnes je utorok.* Výrokom nie je napr. veta *Pozor na psa.*

LOGICKOU SPOJKOU je teda:

- symbol $\wedge$, ktorý čítame „a zároveň“,
- symbol $\vee$, ktorý čítame „alebo“ (v nevylučovacom zmysle, v zmysle aspoň jeden),
- symbol $\Rightarrow$, ktorý čítame „ak, tak“ („z ... vyplýva ...“),
- symbol $\Leftrightarrow$, ktorý čítame „práve vtedy, keď“ („vtedy a len vtedy, keď“).

Príkladmi zložených výrokov sú vety:
a) *Som doma a upratujem si izbu.*
b) *Zavolám Eve alebo za ňou zájdem.*
c) *Ak budem rodičov počúvať, tak na Vianoce dostanem mobil.*

Pravdivostné hodnoty zložených výrokov sú uvedené v tabuľke:

vtedy a len vtedy

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

$A \wedge B$ čítame „A zároveň B“,
$A \vee B$ čítame „A alebo B“,
$A \Rightarrow B$ čítame „ak A, tak B“,
$A \Leftrightarrow B$ čítame „A práve vtedy, keď B“.

Negácia výroku

NEGÁCIOU VÝROKU A je výrok A' (označujeme ho aj $\neg A$), ktorý popiera to, čo výrok A tvrdí (má opačnú pravdivostnú hodnotu ako výrok A). Negáciu výroku A tvoríme obvykle takto: *Nie je pravda, že A.*

A	A'
1	0
0	1

Výrok *Dnes je utorok* znegujeme buď *Dnes nie je utorok.*, alebo *Nie je pravda, že dnes je utorok.*

NEGÁCIA ZLOŽENÝCH VÝROKOV:

$(A \wedge B)' = A' \vee B'$ $\qquad$ $(A \vee B)' = A' \wedge B'$

$(A \Rightarrow B)' = A' \wedge B'$ $\Rightarrow A \wedge B'$ $\qquad$ $(A \Leftrightarrow B)' = (A \wedge B') \vee (A' \wedge B)$

A nemá byť negované

VÝROKOVOU FORMULOU je logické spojenie viacerých výrokov pomocou zátvoriek a symbolov $\wedge, \vee, {}', \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Kvantifikované výroky

KVANTIFIKOVANÉ VÝROKY sú také výroky, ktoré udávajú počet. VŠEOBECNÝ (VEĽKÝ) KVANTIFIKÁTOR $\forall$ vyjadruje, že každý uvažovaný objekt má (alebo žiaden nemá) vlastnosť, o ktorej hovoríme. EXISTENČNÝ (MALÝ) KVANTIFIKÁTOR $\exists$ vyjadruje, že aspoň jeden uvažovaný objekt má vlastnosť, o ktorej hovoríme.

$\forall$ čítame „každý“, „všetky“, „ľubovoľný“ ...
$\exists$ čítame „existuje aspoň jeden“, „niektorý“ ...

$\exists^*$ najviac 1
$\exists!$ práve 1

Množiny a operácie s nimi

Pod pojmom MNOŽINA si predstavujeme súbor (zoskupenie) ľubovoľných rôznych objektov, ktoré majú spoločnú vlastnosť, podľa ktorej môžeme rozhodnúť, či do množiny patria alebo nepatria. Jednotlivé objekty potom nazývame PRVKY MNOŽINY.

Množiny označujeme obvykle veľkými písmenami abecedy (A, B, ...), jednotlivé prvky množiny malými písmenami abecedy (a, b, ...).

Zápis $a \in A$ čítame „a je prvkom množiny A“. Zápis $b \notin A$ čítame „b nie je prvkom množiny A“.

Množiny určujeme:

- vymenovaním, t.j. uvedením všetkých jej prvkov;
- charakteristickou vlastnosťou, pričom charakteristickú vlastnosť V overujeme v základnej množine U, ktorá obsahuje všetky objekty, ktoré nás zaujímajú.

Množina určená vymenovaním je napr. $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

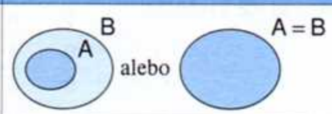
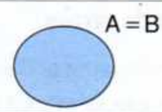
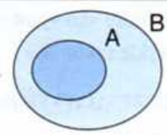
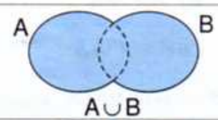
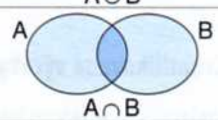
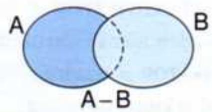
Množinu určenú charakteristickou vlastnosťou zapisujeme $A = \{x \in U;\, V(x)\}$.

Množiny (a operácie s nimi) znázorňujeme pomocou tzv. VENNOVÝCH DIAGRAMOV, čo sú grafické priehradkové schémy, v ktorých množiny znázorňujeme uzavretými čiarami.

Ak $A \subseteq B$, hovoríme tiež, že A je PODMNOŽINOU (alebo časťou) množiny B
Ak $A \subset B$, hovoríme tiež, že A je VLASTNOU PODMNOŽINOU (alebo pravou časťou) množiny B.

PRÁZDNA MNOŽINA je taká množina, ktorá neobsahuje ani jeden prvok. Obvykle ju označujeme $\emptyset$, prípadne $\{\ \}$.

Tabuľka množinových operácií:

OZNAČENIE A NÁZOV	DEFINÍCIA	VENNOV DIAGRAM
$A \subseteq B$ INKLÚZIA MNOŽÍN A, B	$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in U;\, x \in A \Rightarrow x \in B)$ A je podmnožinou B práve vtedy, keď každý prvok množiny A je zároveň prvkom množiny B.	
$A = B$ ROVNOSŤ MNOŽÍN A, B	$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in U;\, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ Množiny A, B sa rovnajú, ak prvok patrí do množiny A práve vtedy, keď patrí do množiny B.	
$A \subset B$ OSTRÁ INKLÚZIA MNOŽÍN A, B	$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$ Množina A je vlastnou podmnožinou množiny B, ak A je podmnožinou B a pritom sa množina A nerovná množine B.	
$A \cup B$ ZJEDNOTENIE MNOŽÍN A, B	$A \cup B = \{x \in U;\, x \in A \vee x \in B\}$ Zjednotením množín A a B je množina, ktorej každý prvok patrí do jednej z množín A, B.	
$A \cap B$ PRIENIK MNOŽÍN A, B	$A \cap B = \{x \in U;\, x \in A \wedge x \in B\}$ Prienikom množín A a B je množina, ktorej každý prvok patrí do množiny A aj do množiny B.	
$A - B$ ROZDIEL MNOŽÍN A, B	$A - B = \{x \in U;\, x \in A \wedge x \notin B\}$ Rozdielom množín A a B je množina, ktorej každý prvok patrí do množiny A a zároveň nepatrí do množiny B.	

1. Prirodzené čísla

Obsah kapitoly:

- Definícia prirodzených čísel
- Vety o operáciách s prirodzenými číslami
- Prvočíslo a číslo zložené, rozklad čísla na prvočísla
- Deliteľnosť a znaky deliteľnosti
- Najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok

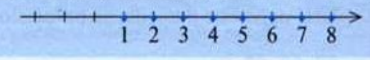
Definícia prirodzených čísel

PRIRODZENÉ ČÍSLA vyjadrujú nenulový počet prvkov. Množinu (obor) prirodzených čísel označujeme písmenom N. Množina prirodzených čísel má nekonečne veľa prvkov.

Vety o operáciách s prirodzenými číslami

Prirodzené čísla môžeme sčítať, odčítať, násobiť i deliť, prípadne umocňovať, odmocňovať. Výsledkom sčítania a násobenia prirodzených čísel je vždy prirodzené číslo. Výsledkom odčítania a delenia prirodzených čísel však prirodzené číslo byť nemusí. Hovoríme, že MNOŽINA prirodzených čísel je UZAVRETÁ vzhľadom na sčítanie a násobenie, nie je uzavretá vzhľadom na odčítanie a delenie. Pri sčítaní a násobení (nielen prirodzených čísel) je možné zmeniť poradie sčítancov alebo činiteľov, pri odčítaní a delení to však nie je možné. Hovoríme, že pre sčítanie a násobenie platí KOMUTATÍVNY ZÁKON, pre odčítanie a delenie však neplatí.

Číslo nula nepatrí medzi prirodzené čísla. Prirodzené čísla sú: 1, 2, 3, 4, 5...



PRE KAŽDÉ TRI PRIRODZENÉ ČÍSLA *a, b, c* PLATÍ:			
VETA O UZAVRETOSTI	sčítania	Súčet $a+b$ je prirodzené číslo.	$10+5 \in \mathrm{N}$
	násobenia	Súčin $a \cdot b$ je prirodzené číslo.	$8 \cdot 7 \in \mathrm{N}$
VETA O KOMUTATÍVNOSTI	sčítania	$a+b=b+a$	$1+19=19+1$
	násobenia	$a \cdot b = b \cdot a$	$2 \cdot 36 = 36 \cdot 2$
VETA O ASOCIATÍVNOSTI	sčítania	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(11+27)+3=11+(27+3)$
	násobenia	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(24 \cdot 3) \cdot 65 = 24 \cdot (3 \cdot 65)$
VETA O NEUTRÁLNOSTI	čísla 1 vzhľadom na násobenie	$a \cdot 1 = a$	$59 \cdot 1 = 59$
VETA O DISTRIBUTÍVNOSTI	násobenia vzhľadom na sčítanie	$a \cdot (b+c) = ab+ac$	$5 \cdot (2+3) = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3$

Pr. 1 Vypočítaj čo najefektívnejšie:

$4 \cdot 31 \cdot 25 + 17 \cdot 32 + 8 \cdot 465 - 7 \cdot 32 + 2 \cdot 465 =$

$4 \cdot 31 \cdot 25 + 17 \cdot 32 + 8 \cdot 465 - 7 \cdot 32 + 2 \cdot 465 = 100 \cdot 31 + (17-7) \cdot 32 + (8+2) \cdot 465 =$
$= \mathbf{3\,100 + 320 + 4\,650 = 8\,070}$

Prvočíslo a číslo zložené, rozklad čísla na prvočísla

Všetky prirodzené čísla nemajú rovnaký počet deliteľov. Podľa počtu deliteľov rozdeľujeme prirodzené čísla na prvočísla, zložené čísla a číslo 1.

Prirodzené číslo nazveme **PRVOČÍSLOM**, ak má len dvoch deliteľov, a to 1 a samo seba. Prirodzené číslo nazveme **ZLOŽENÝM ČÍSLOM**, ak nie je prvočíslom ani číslom 1, dá sa teda rozložiť na súčin aspoň dvoch rôznych prvočísel.

Prvočísel i zložených čísel je nekonečne veľa. Existuje jediné párne prvočíslo, a to číslo 2.

Príklad niekoľkých prvých prvočísel: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, ...
Príklad niekoľkých prvých zložených čísel: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, ...

Pr. 2

Urči najväčšie dvojciferné prvočíslo.

99, 98, 97, 96...
99 je číslo zložené.
98 je číslo zložené.
97 je prvočíslo.
Číslo 97 je najväčšie dvojciferné prvočíslo.

Vypíšeme najväčšie dvojciferné čísla.
Deliteľom 99 je 1, 3, 9, 11, 33, 99.
Deliteľom 98 je 1, 2, 7, 14, 49, 98.
Deliteľom 97 je len 1 a 97.

PRVOČÍSELNÝ ROZKLAD čísla (alebo rozklad čísla na prvočísla) je zápis čísla pomocou prvočísel. Základnou metódou určenia prvočíselného rozkladu zloženého čísla n je jeho postupné (i niekoľkonásobné) delenie prvočíslami 2, 3, 5... menšími než číslo n.

Prvočíselný rozklad čísla 12 342 je $2 \cdot 3 \cdot 11^2 \cdot 17 = 12\,342$.
Prvočíselný rozklad čísla 8 633 je $89 \cdot 97 = 8\,633$.

Deliteľnosť a znaky deliteľnosti

Číslo a je **DELITEĽOM** čísla b (alebo číslo b je deliteľné číslom a), ak po delení čísla b číslom a dostaneme prirodzené číslo. Číslo a je **NÁSOBKOM** čísla b, ak existuje také prirodzené číslo k, že $a = b \cdot k$.

SPOLOČNÝ DELITEĽ čísel a, b je číslo, ktoré obe čísla delí (bez zvyšku).
SPOLOČNÝ NÁSOBOK čísel a, b je číslo, ktoré je deliteľné oboma číslami.

ČÍSLO JE DELITEĽNÉ:

dvoma,	ak má na mieste jednotiek jednu z číslic 0, 2, 4, 6, 8;
troma,	ak je jeho ciferný súčet deliteľný troma;
štyrmi,	ak je jeho posledné dvojčíslie 00 alebo deliteľné štyrmi;
piatimi,	ak má na mieste jednotiek číslicu 0 alebo 5;
šiestimi,	ak je párne a deliteľné troma;
ôsmimi,	ak je jeho posledné trojčíslie 000 alebo deliteľné ôsmimi;
deviatimi,	ak je jeho ciferný súčet deliteľný deviatimi;
desiatimi,	ak má na mieste jednotiek číslicu 0.

Ak je číslo a deliteľom čísla b, tak je číslo b násobkom čísla a.
Prirodzené čísla nazývame **NESÚDELITEĽNÉ ČÍSLA**, ak nemajú iného spoločného deliteľa než číslo 1.

Spoločným deliteľom čísel 8 a 12 je napr. číslo 2, spoločným násobkom čísel 8 a 12 je napr. číslo 24.

CIFERNÝ SÚČET čísla je súčet číslic jeho dekadického zápisu.

Číslo 3 642 je deliteľné šiestimi, lebo je párne a jeho ciferný súčet 15 je deliteľný troma.

Najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok

NAJVÄČŠÍ SPOLOČNÝ DELITEĽ čísel a, b je najväčší zo všetkých spoločných deliteľov týchto čísel. Označujeme ho $D(a, b)$.

Najväčší spoločný deliteľ čísel 60 a 72 je 12. Píšeme $D(60, 72) = 12$.

$$D(60,\ 72) = x = 2^2 \cdot 3 = 12$$
$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$
$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

Najväčší spoločný deliteľ dvoch alebo viacerých čísel získame tak, že z prvočíselných rozkladov čísel vyberieme tie prvočísla, ktoré sa vyskytujú v každom rozklade aspoň raz, a to s najnižšou mocninou každého z prvočísel, ktorá sa v rozkladoch vyskytuje. Tieto mocniny prvočísel medzi sebou vynásobíme.

Pr. 3

Urči najväčší spoločný deliteľ čísel 1 386 a 3 080.

$1\,386 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ — Určíme prvočíselný rozklad 1. čísla.

$3\,080 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$ — Určíme prvočíselný rozklad 2. čísla.

$D(1\,386, 3\,080) = 2 \cdot 7 \cdot 11 = 154$ — Vypočítame najväčší spoločný deliteľ.

NAJMENŠÍ SPOLOČNÝ NÁSOBOK čísel a, b je najmenší zo všetkých spoločných násobkov týchto čísel. Označujeme ho $n(a, b)$.

Najmenší spoločný násobok čísel 60 a 72 je 360. Píšeme $n(60, 72) = 360$.

$$n(60,\ 72) = x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$
$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$
$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Najmenší spoločný násobok dvoch alebo viacerých čísel získame tak, že z prvočíselných rozkladov čísel vyberieme tie prvočísla, ktoré sa vyskytujú aspoň v jednom rozklade, a to s najväčšou mocninou každého z prvočísel, ktorá sa v rozkladoch vyskytuje a tieto mocniny prvočísel medzi sebou vynásobíme.

Určenie najmenšieho spoločného násobku sa používa napr. pri určení najmenšieho spoločného menovateľa pri počítaní so zlomkami.

Pr. 4

Urči najmenší spoločný násobok čísel 585 a 936.

$585 = 3^2 \cdot 5 \cdot 13$ — Určíme prvočíselný rozklad 1. čísla.

$936 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$ — Určíme prvočíselný rozklad 2. čísla.

$n(585, 936) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 = 4\,680$ — Vypočítame najmenší spoločný násobok.

2. Celé čísla

Obsah kapitoly:

- Potreba zavedenia celých čísel
- Definícia celých čísel
- Vety o operáciách s celými číslami
- Pravidlá počítania s opačnými číslami
- Vlastnosti množiny celých čísel

Potreba zavedenia celých čísel

Ak v množine (obore) všetkých prirodzených čísel vykonávame operáciu odčítanie, nesmieme zabudnúť, že menšenec je väčší než menšiteľ. Výsledkom operácie odčítanie musí byť totiž číslo prirodzené. Ak vhodne vytvoríme nový číselný obor, budeme môcť vykonávať aj operáciu odčítanie bez obmedzenia; teda množina (obor) týchto čísel bude uzavretá aj vzhľadom na odčítanie.
Túto množinu (obor) vytvoríme tak, že k množine všetkých prirodzených čísel pridáme množinu všetkých čísel opačných k prirodzeným (teda množinu čísel {-1, -2, -3, -4, ...}) a číslo nula (vzniklo ako výsledok operácie „rozdiel dvoch rovnakých čísel“). Máme teda množinu, ktorú označujeme $\mathbb{Z}$, a nazývame ju množinou celých čísel:
$\mathbb{Z} = \{...-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5...\}$.

$10-5=5$, $5-4=1$ atď., ale v množine prirodzených čísel už nevieme vykonať napr. $4-6$.

Ku každému celému číslu a existuje také celé číslo $-a$, že platí $a+(-a)=0$. Čísla a a $-a$ sa nazývajú ČÍSLA NAVZÁJOM OPAČNÉ.

Opačné číslo k číslu 5 je číslo -5.
Opačné číslo k číslu -5 je číslo 5.
Opačné číslo k číslu 0 je číslo 0.

Definícia celých čísel

CELÉ ČÍSLA sú čísla, ktoré vyjadrujú počty prvkov množín, čísla k nim opačné a číslo nula.

Znázornenie celých čísel na číselnej osi

...-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5...

Vety o operáciách s celými číslami

PRE KAŽDÉ TRI CELÉ ČÍSLA a, b, c PLATÍ:		
VETA O UZAVRETOSTI	sčítania	Súčet $a+b$ je celé číslo.
	násobenia	Súčin $a\cdot b$ je celé číslo.
	odčítania	Rozdiel $a-b$ je celé číslo.
VETA O KOMUTATÍVNOSTI	sčítania	$a+b=b+a$
	násobenia	$a\cdot b=b\cdot a$
VETA O ASOCIATÍVNOSTI	sčítania	$(a+b)+c=a+(b+c)$
	násobenia	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
VETA O NEUTRÁLNOSTI	čísla 0 vzhľadom na sčítanie	$0+a=a$
	čísla 1 vzhľadom na násobenie	$a\cdot 1=a$
VETA O DISTRIBUTÍVNOSTI	násobenia vzhľadom na sčítanie	$a\cdot(b+c)=ab+ac$
	násobenia vzhľadom na odčítanie	$a\cdot(b-c)=ab-ac$

Pravidlá počítania s opačnými číslami

$0-a=-a$	$-(a+b)=-a-b$
$-(-a)=a$	$a-(-b)=a+b$
$(-1)\cdot a=-a$	$a+(-b)=a-b$
$-(a\cdot b)=(-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-ab$	$(-a)\cdot(-b)=ab$

Vlastnosti množiny celých čísel

Často pracujeme len s niektorou podmnožinou oboru celých čísel. Zavedieme pre ne túto symboliku:

$Z=\{\dots -5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\dots\}$

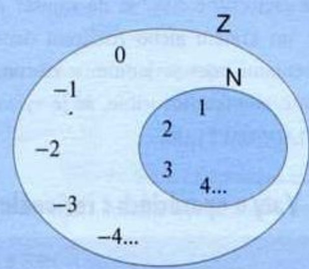
$Z^{+}=\{1,2,3,4,5\dots\}=N$

$Z_0^{+}=\{0,1,2,3,4,5\dots\}$

$Z^{-}=\{\dots -5,-4,-3,-2,-1\}$

$Z_0^{-}=\{\dots -5,-4,-3,-2,-1,0\}$

Vzťah medzi množinou všetkých celých čísel a množinou všetkých prirodzených čísel je $N \subset Z$. Graficky môžeme túto situáciu znázorniť takto:



3. Racionálne čísla

Obsah kapitoly:

Potreba zavedenia racionálnych čísel

Ak v množine (obore) všetkých prirodzených i celých čísel vykonávame operáciu delenie, nesmieme zabudnúť, že delenec musí byť deliteľný deliteľom. Podielom musí byť totiž číslo prirodzené, prípadne celé. Preto treba vytvoriť množinu (číselný obor), ktorá bude uzavretá aj vzhľadom na delenie a na všetky základné počtové operácie.

Definícia racionálnych čísel

RACIONÁLNE ČÍSLA sú všetky čísla, ktoré sa dajú zapísať v tvare zlomku $\frac{p}{q}$, kde p je celé číslo a q je prirodzené číslo. Množinu (obor) racionálnych čísel označujeme Q.

Každé racionálne číslo sa dá zapísať nekonečne mnohými spôsobmi (napr. po krátení alebo rozšírení daného zlomku). Medzi všetkými vyjadreniami existuje jediné, v ktorom sú čísla p a q nesúdeliteľné. O tomto zlomku hovoríme, že je vyjadrením RACIONÁLNEHO ČÍSLA V ZÁKLADNOM TVARE.

ČÍSLO PREVRÁTENÉ k číslu a, kde $a \neq 0$, je číslo $\frac{1}{a}$. Z toho vyplýva, že prevrátené číslo k číslu $\frac{p}{q}$ je číslo $\frac{q}{p}$ pre $p \neq 0$, $q \neq 0$.

Zlomok v základnom tvare je napr. $\frac{4}{5}$.
Zlomok, ktorý nie je v základnom tvare, je napr. $\frac{4}{6}$.

Vety o operáciách s racionálnymi číslami

PRE KAŽDÉ TRI RACIONÁLNE ČÍSLA a, b, c PLATÍ:		
VETA O UZAVRETOSTI	sčítania	Súčet $a+b$ je racionálne číslo.
	násobenia	Súčin $a \cdot b$ je racionálne číslo.
	odčítania	Rozdiel $a-b$ je racionálne číslo.
	delenia	Podiel $a:b$, kde $b \neq 0$, je racionálne číslo.
VETA O KOMUTATÍVNOSTI	sčítania	$a+b=b+a$
	násobenia	$a \cdot b = b \cdot a$
VETA O ASOCIATÍVNOSTI	sčítania	$(a+b)+c=a+(b+c)$
	násobenia	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
VETA O NEUTRÁLNOSTI	čísla 0 vzhľadom na sčítanie	$0+a=a$
	čísla 1 vzhľadom na násobenie	$a \cdot 1 = a$
VETA O DISTRIBUTÍVNOSTI	násobenia vzhľadom na sčítanie	$a \cdot (b+c) = ab+ac$
	násobenia vzhľadom na odčítanie	$a \cdot (b-c) = ab-ac$

Porovnávanie racionálnych čísel a základné počtové výkony so zlomkami

Racionálne čísla zapísané zlomkami $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ $(q \neq 0,\ s \neq 0)$ v základnom tvare porovnávame pomocou súčinov ps, qr:

$\frac{p}{q} < \frac{r}{s} \Leftrightarrow ps < qr$ $\qquad$ $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow ps = qr$ $\qquad$ $\frac{p}{q} > \frac{r}{s} \Leftrightarrow ps > qr$

KRÁTENIE ZLOMKU je úprava zlomku:

$\frac{k \cdot a}{k \cdot b}$ na tvar $\frac{a}{b}$ $(k \neq 0, b \neq 0)$.

ROZŠÍRENIE ZLOMKU je úprava zlomku:

$\frac{a}{b}$ na tvar $\frac{k \cdot a}{k \cdot b}$ $(k \neq 0, b \neq 0)$.

Základné počtové výkony so zlomkami $q \neq 0, s \neq 0$:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs} \qquad \frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{ps - qr}{qs} \qquad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs} \qquad \frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{ps}{qr}, r \neq 0$$

Zápis racionálneho čísla

Racionálne číslo, ktoré sa dá zapísať desatinným zlomkom $\frac{c}{10^n}$, kde c je celé a n prirodzené číslo, sa dá napísať aj ako **DESATINNÉ ČÍSLO**. Je to číslo s **KONEČNÝM DESATINNÝM ROZVOJOM**. Existujú však desatinné čísla, ktoré nie sú racionálne (nedajú sa vyjadriť pomerom dvoch celých čísel). Racionálne čísla môžeme zapisovať v tvare zlomku, desatinného čísla alebo čísla s nekonečným periodickým desatinným rozvojom s vyznačenou periódou.

Skupina opakujúcich sa číslic v desatinnom čísle sa nazýva **PERIÓDA**. V desatinnom zápise čísla píšeme nad periódou vodorovnú čiarku.

Pr. 1

Napiš zlomok $\frac{7}{250}$ ako desatinné číslo.

$$\frac{7}{250} = \frac{7}{250} \cdot \frac{4}{4} = \frac{28}{1000} = 0{,}028$$

Iný postup riešenia:

$7 : 250 = 0{,}028$
70
700
2000
0

Riešenie pomocou prevodu na desatinný zlomok sa nedá použiť pre každé racionálne číslo. Riešenie pomocou delenia sa dá použiť vždy.

Pr. 2

Napiš $\frac{10}{33}$ v tvare desatinného rozvoja.

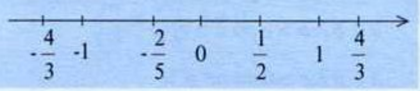
$10 : 33 = 0{,}3030\ldots = 0{,}\overline{30}$
100
10
100
10
⋮

Pri delení 33 dostávame stále rovnaké zvyšky, skupina číslic 30 sa vo výsledku preto stále opakuje. Zlomok potom zapisujeme takto: $\frac{10}{33} = 0{,}\overline{30}$

Znázornenie racionálnych čísel

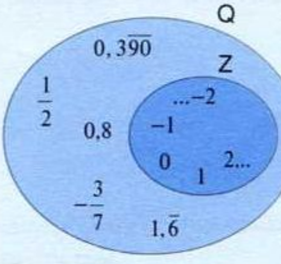
Zásady grafického znázorňovania racionálnych čísel na číselnej osi sú podobné ako zásady znázorňovania celých čísel. Ak by sme na číselnú os zakreslili všetky racionálne čísla, mohlo by sa zdať, že je nimi zaplnená celá číselná os. Napriek tomu existujú však na číselnej osi body, ktoré nie sú obrazmi racionálnych čísel. Príkladmi čísel, ktoré ešte nie sú zobrazené na čís. osi, sú $\sqrt{2}$ a π.

Obrazy niektorých racionálnych čísel na číselnej osi:

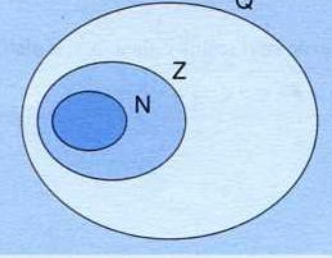


Vlastnosti množiny racionálnych čísel

Vzťah medzi množinou všetkých racionálnych čísel a množinou všetkých celých čísel je $Z \subset Q$.



Odtiaľ vyplýva aj vzťah: $N \subset Z \subset Q$



4. Reálne čísla

Obsah kapitoly:

- Potreba zavedenia reálnych čísel
- Definícia reálnych čísel
- Zaokrúhľovanie a porovnávanie reálnych čísel
- Druhá a tretia odmocnina, odstránenie odmocniny z menovateľa
- Absolútna hodnota reálneho čísla
- Intervaly
- Vlastnosti množiny reálnych čísel

Potreba zavedenia reálnych čísel

Všetky základné operácie (sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie) sú v obore racionálnych čísel uzavreté, nevieme však bez obmedzenia odmocniť každé kladné racionálne číslo.

Definícia reálnych čísel

REÁLNYMI ČÍSLAMI nazývame všetky čísla, ktoré vyjadrujú dĺžku úsečiek (istú úsečku prehlásime za jednotkovú), čísla k nim opačné a nulu. Množinu všetkých reálnych čísel označujeme R; tvoria ju čísla racionálne a čísla iracionálne (nepodielové). ČÍSLA IRACIONÁLNE sú také čísla, ktoré majú neukončený desatinný rozvoj a nemajú periódu.

Pre operácie s reálnymi číslami platia tie isté vety ako pre operácie s racionálnymi číslami (pozri kapitolu č. 3).

Iracionálnymi číslami sú mnohé odmocniny, napr. $\sqrt{2}, \sqrt{5}$, hodnoty goniometrických funkcií, napr. $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, číslo π a iné.

Zaokrúhľovanie a porovnávanie reálnych čísel

Číslo zaokrúhlime na daný rád tak, že nahradíme nulou všetky číslice, ktoré sú vpravo od číslice daného rádu, a ak je prvá z vynechaných číslic:

- menšia ako 5, tak sa žiadna z ponechaných číslic nezmení,
- rovná alebo väčšia ako 5, tak k číslu tvorenému ponechanými číslicami pripočítame jednu jednotku najmenšieho ponechaného rádu.

Číslo 2 843 zaokrúhlené na desiatky je 2 840, zaokrúhlené na stovky je 2 800, zaokrúhlené na tisícky je 3 000.

Jednou z najdôležitejších vlastností množiny všetkých reálnych čísel (oboru reálnych čísel) je to, že je usporiadaná. To znamená, že pre každé dve reálne čísla a, b nastane práve jedna z možností: $a > b$, $a = b$, $a < b$.

Pre každé tri reálne čísla a, b, c platí:

$$a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$$

$$a > b \wedge c > 0 \Rightarrow ac > bc$$

$$a > b \wedge c \in \mathrm{R} \Rightarrow a + c > b + c$$

$$a > b \wedge c < 0 \Rightarrow ac < bc$$

Pre každé štyri reálne čísla a, b, c, d platí:

$$a > b \wedge c > d \Rightarrow a + c > b + d$$

Druhá a tretia odmocnina, odstránenie odmocniny z menovateľa

DRUHÁ ODMOCNINA z nezáporného reálneho čísla a je také nezáporné číslo x, pre ktoré platí: $x^2 = a$. Zapisujeme $\sqrt{a} = x$. Symbol $\sqrt{\ }$ sa nazýva **ODMOCNÍTKO** (znak odmocniny), a je **ZÁKLAD ODMOCNINY** alebo tiež odmocnenec.

Odmocniny zo záporných reálnych čísel nedefinujeme.

Pre každé dve nezáporné reálne čísla a, b platí:

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $\qquad$ $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$ $\qquad$ $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ b \neq 0$

Zlomky, v ktorých sa vyskytujú odmocniny, je vhodné upraviť tak, aby sa v menovateli žiadne odmocniny nevyskytovali. Základom tejto úpravy je vhodné rozšírenie daného zlomku.

Pr. 1

Odstráň odmocninu z menovateľa: a) $\dfrac{12}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ c) $\dfrac{6}{3-\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

a) $\dfrac{12}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$

c) $\dfrac{6}{3-\sqrt{3}} \cdot \dfrac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \dfrac{6\cdot(3+\sqrt{3})}{9-3} = \dfrac{6\cdot(3+\sqrt{3})}{6} = 3+\sqrt{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{3-2} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = 3-2\sqrt{6}+2 = 5-2\sqrt{6}$

TRETIA ODMOCNINA z nezáporného reálneho čísla a je také nezáporné číslo x, pre ktoré platí $x^3 = a$. Zapisujeme $\sqrt[3]{a} = x$.

Pre každé dve nezáporné reálne čísla a, b platí:

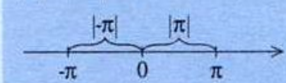
$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ $\qquad$ $a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}},\ b \neq 0$

Absolútna hodnota reálneho čísla

ABSOLÚTNU HODNOTU čísla a označujeme $|a|$. Je definovaná takto:

- ak je $a \geq 0$, tak $|a| = a$,
- ak je $a < 0$, tak $|a| = -a$.

$|\pi| = |-\pi| = \pi$



Pre každé reálne číslo a platí:

$\sqrt{a^2} = |a|$

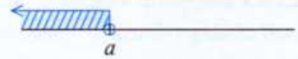
Absolútna hodnota každého reálneho čísla a sa rovná vzdialenosti jeho obrazu na číselnej osi od obrazu čísla nula.

Intervaly

Každé reálne číslo je na číselnej osi znázornené práve jedným bodom. Každému bodu číselnej osi je priradené práve jedno reálne číslo, čiže celá číselná os je zaplnená obrazmi reálnych čísel.

Pri riešení úloh budeme často používať, zapisovať a znázorňovať množiny reálnych čísel, ktoré nazývame **INTERVALY**.

Spôsob zápisu a znázornenie intervalov:

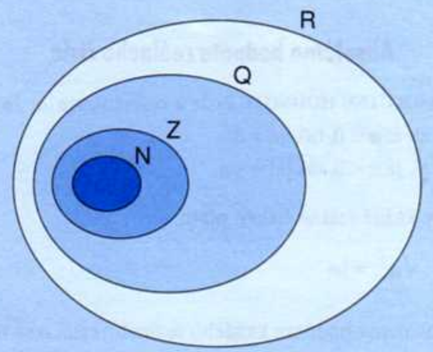
ZÁPIS CHARAKTERISTICKOU VLASTNOSŤOU	ZÁPIS POMOCOU ZÁTVORIEK	ČÍTAME: „INTERVAL JE..."	GRAFICKÉ ZNÁZORNENIE NA ČÍSELNEJ OSI
$x < a$	$(-\infty, a)$	otvorený	
$x \leq a$	$(-\infty, a\rangle$	sprava uzavretý	
$x > b$	$(b, +\infty)$	otvorený	
$x \geq b$	$\langle b, +\infty)$	zľava uzavretý	
$a < x < b$	(a, b)	otvorený	
$a \leq x < b$	$\langle a, b)$	zľava uzavretý	
$a < x \leq b$	$(a, b\rangle$	sprava uzavretý	
$a \leq x \leq b$	$\langle a, b\rangle$	uzavretý	

Čísla pri okrúhlej zátvorke do intervalu nepatria, čísla pri „ostrej" zátvorke do intervalu patria.

Vlastnosti množiny reálnych čísel

Množina všetkých reálnych čísel obsahuje množiny všetkých čísel, o ktorých sme hovorili v kapitolách č. 1, 2 a 3, čiže každé prirodzené číslo je zároveň číslom reálnym, každé celé číslo je číslom reálnym i každé racionálne číslo je reálnym číslom.

Vzťah medzi množinami čísel: $N \subset Z \subset Q \subset R$



5. Komplexné čísla

Obsah kapitoly:

Potreba zavedenia komplexných čísel

Rovnica $x^2+1=0$ nemá v množine reálnych čísel R riešenie. Preto bolo potrebné zaviesť nový číselný obor, ktorý obdobné rovnice umožňuje riešiť.

Definícia komplexných čísel

KOMPLEXNÝM ČÍSLOM nazývame každú usporiadanú dvojicu reálnych čísel. Označujeme ju $z=[a, b]$, pričom a sa nazýva REÁLNA ČASŤ, b IMAGINÁRNA ČASŤ komplexného čísla z.

Pre každé dve komplexné čísla $z_1=[a_1, b_1]$ a $z_2=[a_2, b_2]$ je definovaná rovnosť, súčet a súčin:

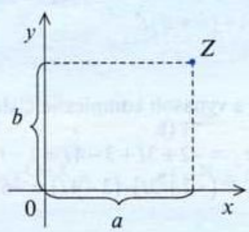
- ROVNOSŤ komplexných čísel
  $z_1=z_2, \Leftrightarrow a_1=a_2 \wedge b_1=b_2$;
- SÚČET komplexných čísel
  $z_1+z_2=[a_1+a_2, b_1+b_2]$;
- SÚČIN komplexných čísel
  $z_1 \cdot z_2=[a_1 a_2-b_1 b_2, a_1 b_2+a_2 b_1]$.

Obor komplexných čísel (množinu všetkých komplexných čísel) označujeme C.

Sčítanie a násobenie komplexných čísel sú komutatívne a asociatívne operácie, násobenie je distributívne vzhľadom na sčítanie.

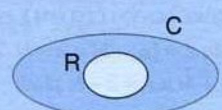
Znázornenie komplexných čísel v Gaussovej rovine a klasifikácia komplexných čísel

Každé komplexné číslo $z=[a, b]$ sa dá znázorniť v rovine s karteziánskou sústavou súradníc $0xy$ (Gaussova rovina, resp. rovina komplexných čísel) takto: Každému komplexnému číslu $z=[a, b]$ je priradený práve jeden bod $Z[x=a, y=b]$ v Gaussovej rovine a obrátene, čiže každému bodu v Gaussovej rovine je priradené jediné komplexné číslo $z=[a, b]$.



Obrazom čísla $z=[0, 0]$ je začiatok 0. Obrazmi čísel $z=[a, 0]$ sú body reálnej osi x. Obrazmi čísel $z=[0, b]$ sú body imaginárnej osi y.

Medzi množinami C, R platí: R $\subset$ C.



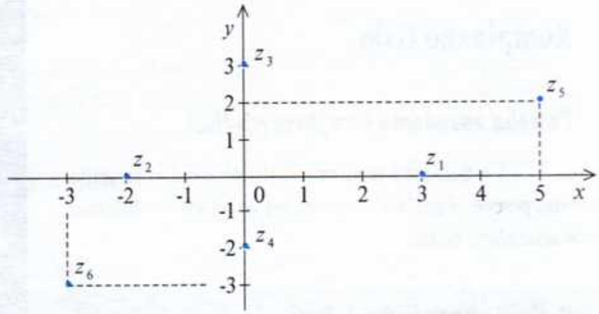
V tmavo vyfarbenej oblasti sa nachádzajú tie komplexné čísla $z=[a, b]$, ktoré majú $b \neq 0$.

Pre komplexné číslo $z=[a, b]$ môžu nastať tieto prípady:

- $a \neq 0, b \neq 0$, teda $z=[a, b]$;
  nazývame ich aj IMAGINÁRNE ČÍSLA
- $a=0, b=0$, teda $z=[0, 0]$; je to reálne číslo nula;
- $a \in$ R, $b=0$, teda $z=[a, 0]$, sú to všetky reálne čísla;
- $a=0, b \in$ R$-\{0\}$, teda $z=[0, b]$, čo sú všetky tzv. RÝDZO IMAGINÁRNE ČÍSLA.

Pr. 1

Znázorni v Gaussovej rovine čísla:
$z_1 = [3, 0]; z_2 = [-2, 0];$
$z_3 = [0, 3]; z_4 = [0, -2];$
$z_5 = [5, 2]; z_6 = [-3, -3]$.



Algebrický tvar komplexného čísla

Číslo [0, 1] označujeme písmenom i a nazývame ho IMAGINÁRNOU JEDNOTKOU, čiže $i = [0, 1]$.

Podľa definície sčítania a násobenia komplexných čísel pre každé komplexné číslo $z = [a, b]$ platí: $z = [a, b] = [a, 0] + [0, b] = [a, 0] + [b, 0] \cdot [0, 1] = a + bi$. Zápis $z = [a, b] = a + bi$ nazývame ALGEBRICKÝ TVAR komplexného čísla.

Výhodou algebrického tvaru komplexného čísla je možnosť operovať s ním ako s algebrickým dvojčlenom.

Platí:

$$i \cdot i = i^2 = [0;1] \cdot [0;1] = [0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0] = [-1;0] = -1$$

Sčítanie a násobenie komplexných čísel v algebrickom tvare

Ak sa $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, tak platí:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = \\ = a + bi + c + di = \\ = (a + c) + (b + d)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = \\ = ac + adi + cbi + bdi^2 = \\ = (ac - bd) + (ad + cb)i$$

Pr. 2

Sčítaj a vynásob komplexné čísla $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, ak $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = 3 - 4i$.

$$z_1 + z_2 = -2 + 3i + 3 - 4i = 1 - i$$
$$z_1 \cdot z_2 = (-2 + 3i) \cdot (3 - 4i) = -6 + 8i + 9i - 12i^2 = -6 + 8i + 9i + 12 = 6 + 17i$$

Komplexné číslo a číslo k nemu komplexne združené

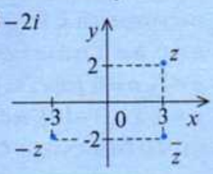
Obrazy komplexne združených čísel z a $\bar{z}$ sú súmerné podľa osi x.

KOMPLEXNE ZDRUŽENÝM ČÍSLOM k číslu $z = [a, b] = a + bi$ nazývame komplexné číslo $\bar{z} = [a, -b] = a - bi$. Zápis $\bar{z}$ čítame „z s pruhom".
Pre čísla $z = a + bi$ a $\bar{z} = a - bi$ platí:

	pričom
$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$	$2a \in \mathrm{R}$,
$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$	$a^2 + b^2 \in \mathrm{R}$

Číslo $-z = -a - bi$ je ČÍSLO OPAČNÉ k číslu $z = a + bi$.

Obrazy komplexne združených čísel $z = 3 + 2i$, $\bar{z} = 3 - 2i$ a čísla $-z = -3 - 2i$ opačného k číslu z.



Odčítanie a delenie komplexných čísel v algebrickom tvare

Pre každé dve komplexné čísla $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ platí:

$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a+bi) + (-c-di) =$

$= (a-c) + (b-d)i$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} =$

$= \frac{(ac+bd)+(cb-ad)i}{c^2+d^2}$

Tieto dva vzťahy si nemusíme pamätať ani sa ich učiť naspamäť. Stačí si uvedomiť, že odčítať komplexné číslo znamená pripočítať číslo opačné a tiež, že pri delení komplexných čísel stačí zlomok $\frac{z_1}{z_2}$ rozšíriť číslom $\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$.

Pr. 3

Urči rozdiel a podiel komplexných čísel $z_1 = 8-5i, z_2 = -3+4i$.

$z_1 - z_2 = (8-5i) - (-3+4i) = (8-5i) + (3-4i) = 11-9i$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8-5i}{-3+4i} = \frac{8-5i}{-3+4i} \cdot \frac{-3-4i}{-3-4i} = \frac{-24+15i-32i-20}{9+16} = \frac{-44-17i}{25} = -\frac{44}{25} - \frac{17}{25}i$

Mocniny komplexných čísel v algebrickom tvare

Mocniny čísla i:

$i^1 = i$	$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$	$i^{10} = i^8 \cdot i^2 = -1$
$i^2 = -1$	$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$	$i^{11} = i^8 \cdot i^3 = -i$
$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$	$i^9 = i^8 \cdot i = i$	$\vdots$

Vidíme, že mocniny čísla i sa opakujú takto:

$i^{4k+1} = i$

$i^{4k+2} = -1$

$i^{4k+3} = -i$

$i^{4k+4} = i^{4(k+1)} = 1$ pre $k \in Z_0^+$

Pr. 4

Vypočítaj: **a)** i^{13} **b)** i^{96} **c)** i^{15} **d)** i^{120}

a) $i^{13} = i^{4\cdot 3+1} = i$ **b)** $i^{96} = i^{4\cdot 24} = 1$ **c)** $i^{15} = i^{4\cdot 3+3} = -i$ **d)** $i^{120} = i^{4\cdot 30} = 1$

Pr. 5

Vypočítaj z^2, ak $z = 8-5i$.

$z^2 = (8-5i)^2 = 8^2 - 2\cdot 8\cdot 5i + (5i)^2 =$
$= 64 - 80i - 25 = 39 - 80i$

Pri výpočte sme použili vzťah:
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Pr. 6

Vypočítaj $(-3+4i)^3$.

$(-3+4i)^3 = (-3)^3 + 3\cdot(-3)^2 \cdot 4i + 3\cdot(-3)\cdot(4i)^2 + (4i)^3 =$
$= -27 + 3\cdot 9\cdot 4i + 3\cdot 3\cdot 16 - 64i =$
$= -27 + 108i + 144 - 64i = 117 + 44i$

Pri výpočte sme použili vzťah:
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Pr. 7 Vypočítaj **a)** $(1+i)^8$, **b)** $(1-i)^{16}$.

a) $(1+i)^8 = [(1+i)^2]^4 = (1+2i-1)^4 = (2i)^4 = 16i^4 = 16$

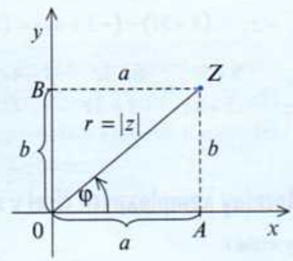
b) $(1-i)^{16} = [(1-i)^2]^8 = (1-2i-1)^8 = (-2i)^8 = 256$

Pr. 8 Vypočítaj $(1+2i)^8$.

$$(1+2i)^8 = \left\{\left[(1+2i)^2\right]^2\right\}^2 = \left[(-3+4i)^2\right]^2 = \left[(-1)\cdot(7+24i)\right]^2 = 49-576+336i = -527+336i$$

Goniometrický tvar komplexného čísla

Obraz Z komplexného čísla $z = [a, b] = a + bi$ v Gaussovej rovine umožňuje vyjadriť komplexné číslo aj v inom ako algebrickom tvare. Určujúcimi parametrami sú vzdialenosť r od začiatku 0 a veľkosť orientovaného uhla φ, ktorého začiatočné rameno je kladná polos x a koncové rameno je polpriamka OZ. Číslo $r = |z|$ nazývame ABSOLÚTNOU HODNOTOU KOMPLEXNÉHO ČÍSLA z. Uhol φ nazývame AMPLITÚDOU (alebo argumentom) KOMPLEXNÉHO ČÍSLA. Ak volíme $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ alebo $\varphi \in \langle 0°, 360°)$, uhol φ nazývame ZÁKLADNOU AMPLITÚDOU (alebo základným argumentom) KOMPLEXNÉHO ČÍSLA.



Pomocou pravouhlého trojuholníka OAZ môžeme vyjadriť tieto vzťahy:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2};\ \frac{a}{|z|} = \cos\varphi;\ \frac{b}{|z|} = \sin\varphi$$

alebo $a = |z|\cos\varphi$; $b = |z|\sin\varphi$.

Vzťahy $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $a = |z|\cdot\cos\varphi$; $b = |z|\cdot\sin\varphi$ nazývame PPREVODOVÉ VZŤAHY medzi algebrickým a goniometrickým tvarom komplexného čísla.

Môžeme písať aj $z = [a, b] = a + bi =$
$= |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi = |z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Teda číslo z sa dá vyjadriť ako $z = |z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Tento zápis sa nazýva GONIOMETRICKÝ TVAR komplexného čísla.

Číslo i píšeme v goniometrickom tvare komplexného čísla pred funkciou $\sin\varphi$, aby sme ho omylom nepovažovali za súčasť amplitúdy. Niekedy používame aj zápis $z = |z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|\cdot cis\,\varphi$

Prevod komplexného čísla v algebrickom tvare na goniometrický tvar

V prípade, že jedna z častí (reálna alebo imaginárna) je nulová, postupujeme pri prevode komplexného čísla z algebrického tvaru na goniometrický takto:

- vyjadríme najprv obe zložky komplexného čísla, čiže reálnu a imaginárnu časť,
- pomocou tohto vyjadrenia znázorníme komplexné číslo v Gaussovej rovine,
- z obrázka vyčítame vzdialenosť komplexného čísla od začiatku sústavy súradníc i uhol, ktorý zviera os x s úsečkou spájajúcou začiatok a obraz komplexného čísla,
- zapíšeme komplexné číslo v goniometrickom tvare.

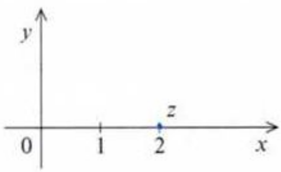
Pr. 10 Preveď na goniometrický tvar tieto komplexné čísla:

a) $z = 2$ **b)** $z = -2$ **c)** $z = 3i$ **d)** $z = -3i$

a) $z = 2 = 2 + 0i$

$|z| = 2,\ \varphi = 0$

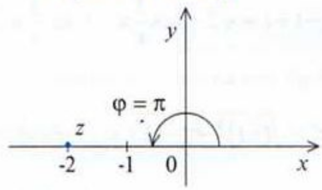
$z = 2 = 2 \cdot (\cos 0 + i \cdot \sin 0)$



b) $z = -2 + 0i$

$|z| = 2,\ \varphi = \pi$

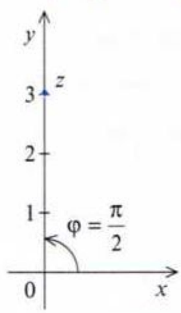
$z = -2 = 2 \cdot (\cos \pi + i \cdot \sin \pi)$



c) $z = 0 + 3i$

$|z| = 3,\ \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

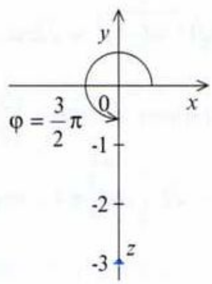
$z = 3i = 3 \cdot \left(\cos \dfrac{\pi}{2} + i \cdot \sin \dfrac{\pi}{2} \right)$



d) $z = 0 - 3i$

$|z| = 3,\ \varphi = \dfrac{3}{2}\pi$

$z = -3i = 3 \cdot \left(\cos \dfrac{3}{2}\pi + i \cdot \sin \dfrac{3}{2}\pi \right)$



V prípade, že ani jedna z častí (reálna alebo imaginárna) nie je nulová, postupujeme pri prevode komplexného čísla z algebrického tvaru na goniometrický takto:

- použitím prevodových vzťahov nájdeme $|z|$, $\sin \varphi$, $\cos \varphi$,
- z hodnôt $\sin \varphi$ a $\cos \varphi$ určíme veľkosť amplitúdy φ,
- zapíšeme komplexné číslo v goniometrickom tvare.

Pr. 11

Preveď na goniometrický tvar tieto komplexné čísla:

a) $z = 1 + i$ **b)** $z = -1 + i$ **c)** $z = -1 - i$ **d)** $z = 1 - i$

a) $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\varphi > 0 \wedge \sin\varphi > 0 \Rightarrow \varphi \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$; $\varphi \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \wedge \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

Amplitúda sa dá ľahko odhadnúť aj z obrázka.

$z = 1 + i = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4} \right)$

b) $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\varphi < 0 \wedge \sin\varphi > 0 \Rightarrow \varphi \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$; $\varphi \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle \wedge \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{3}{4}\pi$

$z = -1 + i = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{3}{4}\pi + i \cdot \sin\frac{3}{4}\pi \right)$

c) $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\varphi < 0 \wedge \sin\varphi < 0 \Rightarrow \varphi \in \left\langle \pi; \frac{3}{2}\pi \right\rangle$; $\varphi \in \left\langle \pi; \frac{3}{2}\pi \right\rangle \wedge \sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{5}{4}\pi$

$z = -1 - i = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{5}{4}\pi + i \cdot \sin\frac{5}{4}\pi \right)$

d) $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\varphi > 0 \wedge \sin\varphi < 0 \Rightarrow \varphi \in \left\langle \frac{3}{2}\pi; 2\pi \right\rangle$; $\varphi \in \left\langle \frac{3}{2}\pi; 2\pi \right\rangle \wedge \sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{7}{4}\pi$

$z = 1 - i = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{7}{4}\pi + i \cdot \sin\frac{7}{4}\pi \right)$

Pr. 12

Preveď na goniometrický tvar komplexné číslo $z = -8 + 6i$.

$|z| = \sqrt{64 + 36} = 10$; $\cos\varphi = -\frac{8}{10} = -0{,}8$; $\sin\varphi = \frac{6}{10} = 0{,}6$

$\cos\varphi < 0 \wedge \sin\varphi > 0 \Rightarrow \varphi \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$; $\varphi \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle \wedge \sin\varphi = 0{,}6 \Rightarrow \varphi = 143°8'$

Pri výpočte $\sin\varphi = 0{,}6$ použijeme tabuľky alebo kalkulačku. Získame najprv uhol $\alpha = 36°52'$ patriaci do I. kvadrantu. Odtiaľ potom $\varphi = 180° - \alpha = 143°8'$.

$z = -8 + 6i = 10 \cdot (\cos 143°8' + i \cdot \sin 143°8')$

Prevod komplexného čísla v goniometrickom tvare na algebrický tvar

Prevod komplexného čísla v goniometrickom tvare na algebrický tvar vykonáme takto:

- najprv číselne vyjadríme cos φ a sin φ,
- vypočítané číselné hodnoty dosadíme do pôvodného tvaru komplexného čísla a upravíme na algebrický tvar.

Pozor, zápisy čísel

$z_1 = -2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

$z_3 = \cos\frac{2}{3}\pi - i\sin\frac{2}{3}\pi$, $z_4 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{4}$

a pod. nie sú zápisy komplexných čísel v goniometrickom tvare.

Pr. 13

Preveď komplexné číslo $z = 2\cdot\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$ z goniometrického tvaru na tvar algebrický.

$$\cos\frac{11}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \sin\frac{11}{6}\pi = -\frac{1}{2} \Rightarrow z = 2\cdot\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right) = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

Pr. 14

Preveď komplexné číslo $z = 5\cdot(\cos 161°30' + i\sin 161°30')$ z goniometrického tvaru na tvar algebrický.

$$\cos 161°30' \doteq -0{,}948\,3 \wedge \sin 161°30' \doteq 0{,}317\,3 \Rightarrow z = 5\cdot(-0{,}948\,3 + i0{,}317\,3) = -4{,}741\,6 + 1{,}586\,5i$$

Ak chceme vypočítať súčet alebo rozdiel dvoch komplexných čísel v goniometrickom tvare, musíme tieto čísla najprv upraviť na algebrický tvar a až potom ich spočítať alebo odpočítať. Ak je to nutné, výsledok môžeme opäť previesť na goniometrický tvar.

Násobenie a delenie komplexných čísel v goniometrickom tvare

Pre súčin a podiel nenulových komplexných čísel
$z_1 = |z_1|\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$
a $z_2 = |z_2|\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ platí:

$$z_1\cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\cdot[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Pr. 15

$z_1 = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ a $z_2 = 1{,}5\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Urči súčin a podiel komplexných čísel $z_1\cdot z_2$ a $\frac{z_1}{z_2}$.

$$z_1\cdot z_2 = 2\cdot 1{,}5\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3\cdot(0 + i) = 3i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{1{,}5}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{4}{3}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{6} + \frac{4}{6}i = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3}i$$

Moivrova veta, n-tá mocnina komplexného čísla v goniometrickom tvare

Pre každé $\varphi \in \mathsf{R}$ a $n \in \mathsf{N}$ platí:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

Pre každé komplexné číslo $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ a $n \in \mathsf{N}$ platí: $z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, čo je n-TÁ MOCNINA KOMPLEXNÉHO ČÍSLA v goniometrickom tvare.

Vo väčšine prípadov je najvýhodnejšie umocňovať a odmocňovať komplexné číslo zapísané v goniometrickom tvare.

Pr. 16

Vypočítaj z^{20} ak $z = 1 + i$.

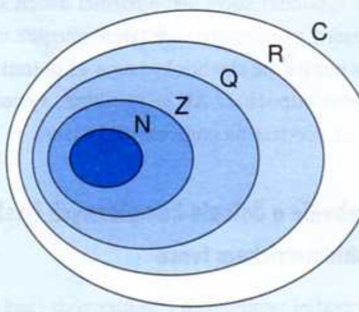
$$|z| = \sqrt{2} \wedge \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z^{20} = (\sqrt{2})^{20} \cdot \left(\cos\frac{20\cdot\pi}{4} + i\sin\frac{20\cdot\pi}{4}\right) = 2^{10} \cdot (\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = 2^{10} \cdot (\cos\pi + i\sin\pi) =$$

$$= 2^{10} \cdot (-1 + i\cdot 0) = -1\,024$$

Vlastnosti množiny komplexných čísel

Vzťah medzi množinou všetkých komplexných čísel a množinou všetkých reálnych čísel je $\mathsf{R} \subset \mathsf{C}$. Odtiaľ vyplýva vzťah medzi všetkými množinami čísel: $\mathsf{N} \subset \mathsf{Z} \subset \mathsf{Q} \subset \mathsf{R} \subset \mathsf{C}$.



6. Mnohočleny

Obsah kapitoly:

- Pojem mnohočlen
- Rovnosť mnohočlenov
- Operácie s mnohočlenmi
- Rozklady mnohočlenov
- Najmenší spoločný násobok a najväčší spoločný deliteľ dvoch alebo viacerých mnohočlenov

Pojem mnohočlen

MNOHOČLENOM (polynómom) S JEDNOU PREMENNOU $x \in \mathbb{R}$ nazývame výraz $M(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Reálne čísla $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sa nazývajú KOEFICIENTY MNOHOČLENA. Ak je $a_n \neq 0$, tak číslo $n \in \mathbb{N}$, čiže najvyšší mocniteľ premennej x, sa nazýva STUPEŇ MNOHOČLENA. Mnohočlen $M(x)$ s jednou premennou x je súčet jednotlivých ČLENOV MNOHOČLENA $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_1 x, a_0$. Mnohočleny môžeme usporiadať vzostupne, čiže od najvyššej mocniny k najnižšej, alebo zostupne, t. j. naopak.

MNOHOČLENOM (polynómom) S m PREMENNÝMI nazývame súčet konečného počtu členov tvaru $a_k x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$. STUPEŇ POLYNÓMU S VIACERÝMI PREMENNÝMI je najvyšší súčet mocniteľov premenných v jednotlivých členoch.

Výrazmi sa podrobnejšie zaoberáme v kapitole č. 7 - Lomené výrazy.

Mnohočlen $M(x) = x^5 + x^4 - 2x^2 + 1 + x$ usporiadame zostupne takto:
$M(x) = x^5 + x^4 - 2x^2 + x + 1$,
a vzostupne takto:
$M(x) = 1 + x - 2x^2 + x^4 + x^5$.

Pr. 1

Urči stupeň a koeficienty nasledujúcich mnohočlenov:

a) $M_1(x) = x^3 - 2x + 5$ **b)** $M_2(x) = x^4 - 1$ **c)** $M_3(x) = 2x^5$

a) $M_1(x)$ má stupeň $n = 3$ a koeficienty $a_0 = 5$, $a_1 = -2$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$.
b) $M_2(x)$ má stupeň $n = 4$ a koeficienty $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$.
c) $M_3(x)$ má stupeň $n = 5$ a koeficienty $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, $a_5 = 2$.

Pr. 2

Urči počet členov, počet premenných a stupeň týchto mnohočlenov:

a) $M_1(x, y) = 2x^2 y + 3y^2 x - 5xy + 10$ **b)** $M_2(x, y, z) = x^3 yz^2 - 2xyz$

a) $M_1(x, y)$ je štvorčlen s dvomi premennými x a y 3. stupňa.
b) $M_2(x, y, z)$ je dvojčlen s tromi premennými x, y a z 6. stupňa.

Zápisy $M(-1)$, $M(-2)$, $M\left(-\frac{5}{2}\right)$ vyjadrujú číselnú hodnotu mnohočlena M pre čísla $-1, -2, -\frac{5}{2}$.

Získame ju tak, že do mnohočlena $M(x)$ dosadíme postupne čísla $x = -1$, $x = -2$, $x = -\frac{5}{2}$

a vykonáme všetky naznačené úkony. Obdobne dosadzujeme do mnohočlenov s viacerými premennými.

Pr. 3

Urči $M(-3)$ mnohočlena $M(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 5$.

$M(-3) = (-3)^4 - (-3)^3 + (-3)^2 + 5 = 81 + 27 + 9 + 5 = 122$

Pr. 4

Urči $M(1, -2)$ mnohočlena $M(x, y) = 3x^2 y^2 + x^2 y - xy^2 + xy + 1$.

$M(1, -2) = 3 \cdot 1^2 \cdot (-2)^2 + 1^2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2) + 1 = 12 - 2 - 4 - 2 + 1 = 5$

Rovnosť mnohočlenov

Dva MNOHOČLENY S JEDNOU PREMENNOU SA ROVNAJÚ, čiže $M(x) = N(x)$, práve vtedy, keď sa rovnajú koeficienty všetkých členov rovnakého stupňa.

Pr. 5

Urči neznáme koeficienty v mnohočlenoch $M(x) = a_1x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ a $N(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ tak, aby sa mnohočleny rovnali.

$M(x) = N(x)$ pre $a_1 = 0,\ b_2 = 3,\ b_1 = 2,\ b_0 = 1$

Operácie s mnohočlenmi

Pre operácie s mnohočlenmi platia nasledujúce zákony: komutatívnosť sčítania a násobenia, asociatívnosť sčítania a násobenia a distributívnosť (pozri operácie s číslami v R).

- SČÍTANIE mnohočlenov - sčítame jednotlivé členy, ktoré majú rovnaké premenné s rovnakým exponentom.

Pr. 6

Sčítaj mnohočleny $x + 1;\ 2x^2 - x - 1;\ x^3 - 2x^2 + 1$.

$(x+1)+(2x^2-x-1)+(x^3-2x^2+1) = x+1+2x^2-x-1+x^3-2x^2+1 = x^3+1$

- ODČÍTANIE mnohočlenov - pripočítame MNOHOČLEN OPAČNÝ, čiže mnohočlen, ktorý vznikne z daného mnohočlena zmenou všetkých znamienok jednotlivých koeficientov na opačné.

Pr. 7

Odpočítaj mnohočlen $4x^2 - 2x + 7$ od mnohočlena $3x^2 - x - 5$.

$(3x^2-x-5)-(4x^2-2x+7) = 3x^2-x-5-4x^2+2x-7 = -x^2+x-12$

Pr. 8

Uprav $(x^2y + xy^2) - (3x^2 - 4xy - 6xy^2) + (7x^2 - xy + 10y^2)$.

$(x^2y+xy^2)-(3x^2-4xy-6xy^2)+(7x^2-xy+10y^2) =$
$= x^2y+xy^2-3x^2+4xy+6xy^2+7x^2-xy+10y^2 = x^2y+7xy^2+4x^2+3xy+10y^2$

- NÁSOBENIE mnohočlena JEDNOČLENOM - týmto jednočlenom vynásobíme každý člen mnohočlena a ak sa dá, tak niektoré z takto vzniknutých súčinov sčítame.

Pr. 9

Uprav $a^2\cdot(b^2-c^2)-b^2\cdot(c^2+1)+c^2\cdot(a^2+b^2)+b^2\cdot(1-a^2)$.

$a^2\cdot(b^2-c^2)-b^2\cdot(c^2+1)+c^2\cdot(a^2+b^2)+b^2\cdot(1-a^2) =$
$= a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2-b^2+c^2a^2+c^2b^2+b^2-a^2b^2 = 0$

- NÁSOBENIE mnohočlena MNOHOČLENOM - každý člen jedného mnohočlena vynásobíme každým členom druhého a vzniknuté súčiny sčítame.

Pr. 10

Uprav $(a+b-c)\cdot(3a-b+c)$.

$(a+b-c)\cdot(3a-b+c) = 3a^2+3ab-3ac-ab-b^2+bc+ac+bc-c^2 =$
$= 3a^2+2ab-2ac+2bc-b^2-c^2$

Pri počítaní s mnohočlenmi je výhodné využívať vzťahy:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Vyššie mocniny mnohočlenov upravujeme pomocou binomickej vety (pozri kapitolu č. 5).

Pr. 11

Uprav $(x^2 - 3x + 1)^2$.

$$(x^2 - 3x + 1)^2 = x^4 + 9x^2 + 1 - 6x^3 + 2x^2 - 6x = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$$

Pr. 12

Uprav $\left(2x - \frac{y}{3}\right)^2$.

$$\left(2x - \frac{y}{3}\right)^2 = 4x^2 - \frac{4xy}{3} + \frac{y^2}{9}$$

- **DELENIE** mnohočlena **JEDNOČLENOM** - každý člen mnohočlena vydelíme jednočlenom.

Pri delení musí byť deliteľ vždy rôzny od nuly. Výsledkom delenia mnohočlenov nemusí byť vždy mnohočlen.

Pr. 13

Uprav $(6u^2v - 2uv^2 + uv - 1) : 3uv$.

$$(6u^2v - 2uv^2 + uv - 1) : 3uv = 2u - \frac{2v}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3uv}$$

Podmienky: $u \neq 0,\ v \neq 0$

- **DELENIE** mnohočlena **MNOHOČLENOM**

Pr. 14

Vydeľ $(5x^5 + 7x^4 - 20x^3 - 11x^2 + 23x - 6) : (x^2 + x - 3)$.

$$\begin{array}{l}
(5x^5 + 7x^4 - 20x^3 - 11x^2 + 23x - 6) : (x^2 + x - 3) = 5x^3 + 2x^2 - 7x + 2 \\
\underline{-(5x^5 + 5x^4 - 15x^3)} \\
\quad 2x^4 - 5x^3 - 11x^2 + 23x - 6 \\
\quad \underline{-(2x^4 + 2x^3 - 6x^2)} \\
\quad\quad -7x^3 - 5x^2 + 23x - 6 \\
\quad\quad \underline{-(-7x^3 - 7x^2 + 21x)} \\
\quad\quad\quad 2x^2 + 2x - 6 \\
\quad\quad\quad \underline{-(2x^2 + 2x - 6)} \\
\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}$$

Podmienky: $x^2 + x - 3 \neq 0$

Zvyšok pri delení je nula.

Pr. 15

Vydeľ $(8x^3 - 10x^2 - 13x + 19) : (2x - 3)$.

$$\begin{array}{l}
(8x^3 - 10x^2 - 13x + 19) : (2x - 3) = 4x^2 + x - 5 + \frac{4}{2x - 3} \\
\underline{-(8x^3 - 12x^2)} \\
\quad 2x^2 - 13x + 19 \\
\quad \underline{-(2x^2 - 3x)} \\
\quad\quad -10x + 19 \\
\quad\quad \underline{-(-10x + 15)} \\
\quad\quad\quad 4
\end{array}$$

Podmienky: $x \neq \frac{3}{2}$

V príklade sú mnohočleny (delenec i deliteľ) usporiadané zostupne. Ak by to tak v zadaní úlohy nebolo, musíme toto usporiadanie vykonať. Zvyšok pri delení je $\frac{4}{2x-3}$.

Rozklady mnohočlenov

ROZKLAD MNOHOČLENA je vlastne jeho zápis v tvare súčinu niekoľkých mnohočlenov nižšieho stupňa.

$x^2y + xy - xy^3 = xy(x + 1 - y^2)$

Základné metódy rozkladu:

1. VYNÍMANIE SPOLOČNÉHO JEDNOČLENA PRED ZÁTVORKU

Týmto jednočlenom delíme každý člen mnohočlena.

2. POSTUPNÉ VYNÍMANIE

Vhodne rozdelíme členy mnohočlena do niekoľkých skupín tak, aby sme každú skupinu mohli napísať v tvare súčinu (každá skupina má spoločného deliteľa, ktorého vyjmeme pred zátvorku), čiže napíšeme daný mnohočlen v tvare súčtu súčinov. Ak sa dá z každého sčítanca vyňať istý výraz pred zátvorku, tak sme daný mnohočlen rozložili (napísali sme ho v tvare súčinu).

$ax - ay + bx - by = a(x - y) + b(x - y) = (x - y)(a + b)$

$ax^2 - bx^2 + bx - ax = x^2(a - b) - x(a - b) = (a - b)(x^2 - x) = (a - b)x(x - 1) = x(a - b)(x - 1)$

3. VYUŽITÍM VZŤAHOV

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

Niekedy musíme kombinovať vynímanie pred zátvorku s využitím vzťahov.

Pr. 16

Dané výrazy uprav na súčin maximálneho počtu mnohočlenov:

a) $2a^5 - 2a$ **b)** $2a^4 - 16a$ **c)** $27r^4 + r$ **d)** $xz - yz - x^2 + 2xy - y^2$

a) $2a^5 - 2a = 2a(a^4 - 1) = 2a(a + 1)(a - 1)(a^2 + 1)$

b) $2a^4 - 16a = 2a(a^3 - 8) = 2a(a - 2)(a^2 + 2a + 4)$

c) $27r^4 + r = r(27r^3 + 1) = r(3r + 1)(9r^2 - 3r + 1)$

d) $xz - yz - x^2 + 2xy - y^2 = z(x - y) - (x^2 - 2y + y^2) = z(x - y) - (x - y)^2 = (x - y)(z - x + y)$

4. ROZKLAD KVADRATICKÉHO TROJČLENA

Niektoré kvadratické trojčleny sa dajú rozložiť v obore reálnych čísel R i v jeho podmnožinách. S rozkladmi kvadratických trojčlenov v R sa budeme zaoberať v kapitole kvadratické rovnice (pozri kapitolu č. 10).

Napríklad trojčlen $x^2 + 5x + 7$ sa v obore R nedá rozložiť na súčin. Trojčlen $x^2 - 11x + 9$ sa v obore R dá rozložiť na súčin, no v obore Z sa nedá rozložiť na súčin.

Najmenší spoločný násobok a najväčší spoločný deliteľ dvoch alebo viacerých mnohočlenov

Najmenší spoločný násobok n dvoch alebo viacerých mnohočlenov získame obdobne ako pre prirodzené čísla (pozri kapitolu č. 1) tak, že z rozkladov mnohočlenov na prvočinitele vyberieme tie prvočinitele, ktoré sa vyskytujú aspoň v jednom rozklade, a to s najväčšou mocninou každého z prvočiniteľov, ktorý sa v rozkladoch vyskytuje a tieto mocniny prvočiniteľov vynásobíme.

Najväčší spoločný deliteľ D dvoch alebo viacerých mnohočlenov získame opäť ako pre prirodzené čísla tak, že z prvočíselných rozkladov mnohočlenov vyberieme tie prvočinitele, ktoré sa vyskytujú v každom rozklade aspoň raz, a to s najnižšou mocninou každého z prvočiniteľov, ktorý sa v rozkladoch vyskytuje. Tieto mocniny prvočiniteľov vynásobíme.

Rozklady mnohočlenov, určenie n a D, budeme využívať v ďalších kapitolách, najmä však v kapitole Lomené výrazy.

Pr. 17

Dané sú mnohočleny $M = x^2 - 1$ a $N = x^3 + x^2 + x + 1$. Urči $n(M, N)$ a $D(M, N)$.

$M = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, $N = x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^2+1)$

$n(M, N) = (x+1)(x-1)(x^2+1)$

$D(M, N) = x + 1$

Pr. 18

Dané sú mnohočleny $V_1 = x^2 - y^2, V_2 = x^4 - y^4, V_3 = x^6 - y^6$. Urči $n(V_1, V_2, V_3)$ a $D(V_1, V_2, V_3)$.

$V_1 = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

$V_2 = x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

$V_3 = x^6 - y^6 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (x-y)(x+y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

$n(V_1, V_2, V_3) = (x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$D(V_1, V_2, V_3) = (x+y)(x-y)$

7. Lomené výrazy

Obsah kapitoly:

- Pojem výraz
- Úpravy algebrických výrazov

Pojem výraz

VÝRAZY sú matematické zápisy. POČTOVÉ VÝRAZY sú výrazy, ktorými vyjadrujeme počtové operácie s číslami v určenom poradí, v ktorom majú byť vykonané (ako výrazový prostriedok slúžia rôzne typy zátvoriek). ALGEBRICKÉ VÝRAZY sú výrazy skladajúce sa z čísel a písmen označujúcich premenné, ktoré sú spojené znakmi operácií, prípadne zátvorkami.

Príkladom počtového výrazu je $3+(2-5)\cdot(-1)$.
Príkladom algebrického výrazu je $x-5$ alebo $x+\sqrt{x}-5$.

LOMENÉ VÝRAZY sú výrazy zapísané v tvare podielu dvoch výrazov, pričom menovateľ (deliteľ) musí byť nenulový.

OBOROM DEFINÍCIE PREMENNÝCH algebrického výrazu je množina všetkých tých hodnôt premenných, pre ktoré má daný algebrický výraz zmysel (je definovaný).

Dva ALGEBRICKÉ VÝRAZY V_1, V_2 SA ROVNAJÚ, ak sa rovnajú ich definičné obory a ak pre ľubovoľné prípustné hodnoty premenných nadobúdajú oba výrazy rovnaké hodnoty. Zapisujeme $V_1 = V_2$.

Výrazy $V_1 = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ a $V_2 = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ sa rovnajú pre všetky $x \in (0, \infty)$.

Úpravy algebrických výrazov

ÚPRAVOU, čiže zjednodušením ALGEBRICKÉHO VÝRAZU V_1, rozumieme nahradenie výrazu V_1 iným (jednoduchším) algebrickým výrazom V_2, pričom platí $V_1 = V_2$.

Pri úpravách lomených výrazov využívame všetky poznatky, ktoré sú uvedené v kapitolách č. 1, 2, 3, 4, 6, 8.

Slovo „jednoduchším" vyjadruje snahu dosiahnuť, aby algebrický výraz obsahoval po úpravách čo najmenej algebrických operácií, čo najnižší stupeň premenných, čo najmenší počet zátvoriek atď.

Pr. 1

Uprav v R: **a)** $\dfrac{a^2-ab}{ab-b^2}$ **b)** $\dfrac{9z^2-12z+4}{3z-2}$ **c)** $\dfrac{3uv+9v-2u-6}{3uv-2u-9v+6}$ **d)** $\dfrac{2a}{7x^2y}+\dfrac{3b}{4xy^2}$

a) $\dfrac{a^2-ab}{ab-b^2}=\dfrac{a(a-b)}{b(a-b)}=\dfrac{a}{b}$ Podmienky: $b \neq 0,\ a \neq b$

b) $\dfrac{9z^2-12z+4}{3z-2}=\dfrac{(3z-2)^2}{3z-2}=3z-2$ Podmienky: $z \neq \dfrac{2}{3}$

c) $\dfrac{3uv+9v-2u-6}{3uv-2u-9v+6}=\dfrac{3v(u+3)-2(u+3)}{3v(u-3)-2(u-3)}=\dfrac{(u+3)(3v-2)}{(u-3)(3v-2)}=\dfrac{u+3}{u-3}$ Podmienky: $u \neq 3,\ v \neq \dfrac{2}{3}$

d) $\dfrac{2a}{7x^2y}+\dfrac{3b}{4xy^2}=\dfrac{8ay+21bx}{28x^2y^2}$ Podmienky: $x \neq 0,\ y \neq 0$

Př. 2

Uprav v R $\dfrac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}$.

$$\frac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}=\frac{3a^2(a-2b)+b^2(a-2b)}{9a^4(a-2b)-b^4(a-2b)}=\frac{(a-2b)(3a^2+b^2)}{(a-2b)(9a^4-b^4)}=$$

$$=\frac{3a^2+b^2}{(3a^2+b^2)(3a^2-b^2)}=\frac{1}{3a^2-b^2}$$

Podmienky: $a\neq 2b,\ a\neq \pm\frac{b}{\sqrt{3}},\ a\neq 0,\ b\neq 0$

Př. 3

Zjednoduš: **a)** $\dfrac{2m-n}{m-n}+\dfrac{m}{n-m}$ **b)** $\dfrac{3+2x}{2-x}-\dfrac{2-3x}{2+x}+\dfrac{x(16-x)}{x^2-4}$

a) $\dfrac{2m-n}{m-n}+\dfrac{m}{n-m}=\dfrac{2m-n-m}{m-n}=\dfrac{m-n}{m-n}=1$

Podmienky: $m\neq n$

b) $\dfrac{3+2x}{2-x}-\dfrac{2-3x}{2+x}+\dfrac{x(16-x)}{x^2-4}=\dfrac{3+2x}{2-x}-\dfrac{2-3x}{2+x}+\dfrac{16x-x^2}{(x-2)(x+2)}=$

$$=\frac{(-3-2x)(x+2)-(2-3x)(x-2)+16x-x^2}{(x+2)(x-2)}=$$

Podmienky: $x\neq\pm 2$

$$=\frac{-3x-2x^2-6-4x-2x+3x^2+4-6x+16x-x^2}{(x+2)(x-2)}=\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x+2}.$$

Př. 4

Zjednoduš: $\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{3}{n^3-1}-\dfrac{3}{n^2+n+1}\right)\cdot\left(n+\dfrac{2n+1}{n-1}\right)$.

$$\left(\frac{1}{n-1}-\frac{3}{n^3-1}-\frac{3}{n^2+n+1}\right)\cdot\left(n+\frac{2n+1}{n-1}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{n-1}-\frac{3}{(n-1)(n^2+n+1)}-\frac{3}{n^2+n+1}\right)\cdot\left(\frac{n^2-n+2n+1}{n-1}\right)=\frac{n^2+n+1-3-3n+3}{(n+1)(n^2+n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{n-1}=$$

$$=\frac{n^2-2n+1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{(n-1)^2}{n-1}\cdot\frac{1}{n-1}=1$$

Podmienky: $n\neq 1$

Př. 5

Zjednoduš: $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}\cdot\dfrac{2-\dfrac{1+b^2}{b}}{\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{2}{b}+1}$.

$$\frac{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}{1-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}\cdot\frac{2-\frac{1+b^2}{b}}{\frac{1}{b^2}-\frac{2}{b}+1}=\frac{\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a^2-b^2-a^2-b^2}{a^2-b^2}}\cdot\frac{\frac{2b-1-b^2}{b}}{\frac{1-2b+b^2}{b^2}}=$$

Podmienky: $a\neq\pm b,\ b\neq 0,\ b\neq 1$

$$=\frac{\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a-b)(a+b)}}{\frac{-2b^2}{(a-b)(a+b)}}\cdot\frac{-\frac{(b-1)^2}{b}}{\frac{(b-1)^2}{b^2}}=\frac{4ab}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{(a-b)(a+b)}{-2b^2}\cdot\frac{-(b-1)^2}{b}\cdot\frac{b^2}{(b-1)^2}=2a$$

Pr. 6

Zjednoduš: $V=\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right)^{-2}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}\right)^{-2}$.

$$V=\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right)^{-2}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}\right)^{-2}=$$

$$=\left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2-(\sqrt{a+x})^2}{\sqrt{a+x}\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{x})}\right)^{-2}-\left(\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2-(\sqrt{a+x})^2}{\sqrt{a+x}\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{x})}\right)^{-2}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a+x}\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{x})}{a+2\sqrt{ax}+x-a-x}\right)^{2}-\left(\frac{\sqrt{a+x}\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{x})}{a-2\sqrt{ax}+x-a-x}\right)^{2}=$$

$$=\frac{(a+x)(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}{4ax}-\frac{(a+x)(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}{4ax}=$$

$$=\frac{a+x}{4ax}\cdot(a+2\sqrt{ax}+x-a+2\sqrt{ax}-x)=\frac{a+x}{4ax}\cdot 4\sqrt{ax}=\frac{a+x}{\sqrt{ax}}$$

Podmienky: $a>0,\ x>0,\ x\neq a$

$$\sqrt{a^2-2ab+b^2}=\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|$$

Obsah kapitoly:

- ❑ Mocniny s prirodzeným mocniteľom
- ❑ Mocniny s celočíselným mocniteľom
- ❑ Odmocniny
- ❑ Mocniny s reálnym mocniteľom
- ❑ Odstránenie odmocniny z menovateľa, čiastočné odmocnenie

8. Výrazy s mocninami a odmocninami

Mocniny s prirodzeným mocniteľom

Pre ľubovoľné reálne číslo a a pre každé prirodzené číslo n je v množine reálnych čísel definovaná n-TÁ MOCNINA: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ činiteľov}}$

Číslo a nazývame MOCNENEC (alebo základ mocniny), n sa nazýva MOCNITEĽ (alebo exponent), číslo a^n sa nazýva MOCNINA.

Mocniny s celočíselným mocniteľom

Pre každé reálne číslo a ($a \neq 0$) a pre každé celé číslo n definujeme nasledujúce mocniny:

$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$5^0 = 1; 2^{-3} = \frac{1}{2^3}; \frac{1}{2^{-3}} = 2^3;$

0^0 nie je definované

Pravidlá pre počítanie s mocninami ($a, b \in \mathrm{R}$, $r, s \in \mathrm{N}$):

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$	
$a^r : a^s = a^{r-s}$	$a \neq 0$
$(a^r)^s = a^{rs}$	
$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$	
$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$	$b \neq 0$

$5^2 \cdot 5^1 = 5^3 = 125$

$\frac{3^4}{3^3} = 3^1 = 3$

$(2^2)^4 = 2^8 = 256$

$(5 \cdot \sqrt{2})^2 = 5^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 25 \cdot 2 = 50$

$\left(\frac{3}{10}\right)^3 = \frac{3^3}{10^3} = \frac{9}{1000} = 0{,}009$

Odmocniny

Ku každému nezápornému číslu a a ku každému prirodzenému číslu n existuje práve jedno nezáporné číslo b, pre ktoré platí: $b^n = a$. Zapisujeme $\sqrt[n]{a} = b$, kde b je n-TÁ ODMOCNINA z čísla a. Číslo a sa nazýva ODMOCNENEC (základ odmocniny), n sa nazýva ODMOCNITEĽ.

Pravidlá pre počítanie s odmocninami ($a \geq 0$, $b \geq 0$, $m, n \in \mathrm{N}$):

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$b \neq 0$
$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	
$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^m}$	

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{12}$

$\frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[5]{10}} = \sqrt[5]{\frac{5}{10}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2}}$

$(\sqrt[3]{10})^2 = \sqrt[3]{10^2} = \sqrt[3]{100}$

$\sqrt[2]{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[6]{16}; \sqrt[2]{\sqrt[2]{625}} = \sqrt[4]{625}$

$\sqrt[2]{3} = \sqrt[2 \cdot 2]{3^2} = \sqrt[4]{9}$

Mocniny s reálnym mocniteľom

Pre $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ môžeme písať odmocniny v tvare mocniny s racionálnym exponentom:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}, \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{5}{3}}$$

Použitím mocnín s racionálnym mocniteľom je možné definovať aj mocniny s iracionálnym mocniteľom a súhrnne aj mocniny s reálnym mocniteľom.

$$5^{\sqrt{3}} \cdot 5^{1-\sqrt{3}} = 5^{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}} = 5^1 = 5$$

$$\left(2^{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = 2^{(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})} = $$

$$= 2^{3-5} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Už skôr uvedené vety o operáciách s mocninami môžeme použiť aj pre mocniny s reálnym mocniteľom, ak $r, s \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Pr. 1

Zjednoduš $V = \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a \cdot \sqrt[4]{a}}}$.

$$V = \left[a \cdot \left(a \cdot a^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(a \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{12}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{12+4+1}{12}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{17}{12}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{17}{24}} = \sqrt[24]{a^{17}}$$

Podmienky: $a \geq 0$

Pr. 2

Zjednoduš $V = \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x^6 \cdot \sqrt[4]{x^3}}} : \sqrt[5]{x^4 \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[6]{x^7}}$, pre $x > 0$.

$$V = \left[x \cdot \left(x^6 \cdot x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} : \left[x^4 \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{7}{6}}\right]^{\frac{1}{5}} = \left(x^{\frac{1}{2}} \cdot x \cdot x^{\frac{1}{8}}\right) : \left(x^{\frac{48+3+14}{12}}\right)^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{4+8+1}{8}} : \left(x^{\frac{65}{12}}\right)^{\frac{1}{5}} =$$

$$= x^{\frac{13}{8}} : x^{\frac{13}{12}} = x^{\frac{39-26}{24}} = x^{\frac{13}{24}} = \sqrt[24]{x^{13}}$$

Použili sme mocniny s racionálnym exponentom.

Pr. 3

Zjednoduš $V = \left(\frac{a^{-\frac{2}{3}}}{b^{-1}} - \frac{b^{-1}}{a^{-\frac{2}{3}}}\right) : \left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}}{b^{-\frac{1}{2}}} - \frac{b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{3}}}\right)$.

$$V = \left(\frac{a^{-\frac{2}{3}}}{b^{-1}} - \frac{b^{-1}}{a^{-\frac{2}{3}}}\right) : \left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}}{b^{-\frac{1}{2}}} - \frac{b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{3}}}\right) = \frac{a^{-\frac{4}{3}} - b^{-2}}{a^{-\frac{2}{3}} \cdot b^{-1}} : \frac{a^{-\frac{2}{3}} - b^{-1}}{b^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}}} = \frac{\frac{1}{a^{\frac{4}{3}}} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^{\frac{2}{3}} b}} : \frac{\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}}}} =$$

$$= \frac{\frac{b^2 - a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} b^2}}{\frac{1}{a^{\frac{2}{3}} b}} : \frac{\frac{b - a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} b}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}}}} = \frac{\left(b^2 - a^{\frac{4}{3}}\right) a^{\frac{2}{3}} b}{a^{\frac{4}{3}} b^2} : \frac{\left(b - a^{\frac{2}{3}}\right) a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{3}} b} = \frac{\left(b - a^{\frac{2}{3}}\right)\left(b + a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{2}{3}} b} \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}}}{b - a^{\frac{2}{3}}} = \frac{b + a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}}}$$

Podmienky: $a > 0$, $b > 0$, $a^{\frac{2}{3}} \neq b$

Odstránenie odmocniny z menovateľa, čiastočné odmocnenie

Odmocnina z menovateľa zlomku sa dá odstrániť niekoľkými spôsobmi podľa počtu odmocnín tak, ako v uvedených príkladoch (pozri aj kapitolu č. 4, príklad 1).

Pr. 4

Odstráň odmocninu z menovateľa: **a)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$

a) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{1}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{1-3} = \frac{1-\sqrt{3}}{-2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Pr. 5

Odstráň odmocninu z menovateľa: **a)** $\frac{6}{\sqrt{15}-\sqrt{12}}$ **b)** $\frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

a) $\frac{6}{\sqrt{15}-\sqrt{12}} = \frac{6}{\sqrt{15}-\sqrt{12}} \cdot \frac{\sqrt{15}+\sqrt{12}}{\sqrt{15}+\sqrt{12}} = \frac{6\cdot(\sqrt{15}+\sqrt{12})}{3} = 2\cdot(\sqrt{15}+\sqrt{12})$

b) $\frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{12}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}} \cdot \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}} = \frac{12\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5} = \frac{12\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2+2\sqrt{6}+3-5} =$

$= \frac{12\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2\sqrt{6}} = \frac{6\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}) = \sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{30} =$

$= 2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}$

V záverečnom kroku predchádzajúceho príkladu sme pracovali s $\sqrt{12}$ a $\sqrt{18}$, upravovali sme ich. Táto úprava sa nazýva čiastočné odmocnenie.

Platí, že $\sqrt{A^2} = |A|$ pre všetky $A \in \mathrm{R}$.

Podstatou **ČIASTOČNÉHO ODMOCNENIA** je rozklad odmocnenca na taký súčin, ktorého aspoň jeden činiteľ vieme odmocniť.

$\sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{18} = \sqrt{9\cdot 2} = 3\sqrt{2}$

9. Lineárne rovnice a ich sústavy

rovnica je výroková forma

Obsah kapitoly:

Pojem rovnica

Ak sú $f(x)$ a $g(x)$ funkcie premennej x definovanej na množine $D \subset R$, tak pod pojmom ROVNICA rozumieme vzťah $f(x) = g(x)$. RIEŠIŤ ROVNICU znamená určiť všetky $x \in D$, pre ktoré sa z rovnice stáva pravdivá rovnosť. Všetky tieto riešenia (korene) tvoria OBOR PRAVDIVOSTI K. Množina D sa nazýva OBOR DEFINÍCIE (definičný obor).

Funkciu na pravej strane nazývame PRAVOU STRANOU ROVNICE, funkciu na ľavej strane ĽAVOU STRANOU ROVNICE.

Pri riešení rovníc môžeme použiť tieto EKVIVALENTNÉ ÚPRAVY: Úpravy ktoré vedú k [illegible] riešeniam

NÁZOV EKVIVALENTNEJ ÚPRAVY	ZÁPIS EKVIVALENTNEJ ÚPRAVY	PRÍKLAD EKVIVALENTNEJ ÚPRAVY ROVNICE $x^2=4$
Výmena strán rovnice	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow g(x) = f(x)$	$4 = x^2$
Pripočítanie funkcie $h(x)$ definovanej na množine D.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$	$x^2 + x = 4 + x$
Násobenie nenulovou funkciou $h(x)$ definovanou na množine D.	$h(x) \neq 0$ pre $x \in D$: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$	$x^2 \cdot x = 4 \cdot x$
Delenie nenulovou funkciou $h(x)$ definovanou na množine D.	$h(x) \neq 0$ pre $x \in D$: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) : h(x) = g(x) : h(x)$	$x^2 : x^2 = 4 : x^2$
Umocnenie nezáporných strán rovnice.	$f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0$ pre $x \in D$: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^n(x) = g^n(x);\ n \in N$	$(x^2)^2 = 4^2$
Odmocnenie nezáporných strán rovnice.	$f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0$ pre $x \in D$: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)};\ n \in N$	$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$
Logaritmovanie kladných strán rovnice.	$f(x) > 0,\ g(x) > 0$ pre $x \in D$: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \log_a f(x) = \log_a g(x)$; $a \in R,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\log_4 x^2 = \log_4 4$

Ekvivalentnými úpravami sa nezmení obor pravdivosti žiadnej novovzniknutej rovnice. Nemusíme preto robiť skúšku ako neoddeliteľnú súčasť riešenia rovnice. Ak ju robíme, tak overujeme len správnosť vykonaných úprav. Pri niektorých typoch rovníc (napr. s neznámou v odmocnenci) je skúška neoddeliteľnou súčasťou riešenia.

Pojem lineárna rovnica a jej riešenie

LINEÁRNOU ROVNICOU s neznámou x nazývame každú rovnicu, ktorá sa dá upraviť na tvar $ax + b = 0$; $a \in R$, $b \in R$.

Ak je $a \neq 0$, má rovnica práve jeden koreň $x = -\frac{b}{a}$. Ak sa $a = 0$ a $b = 0$, má rovnica nekonečne veľa riešení (koreňov). Ak sa $a = 0$ a $b \neq 0$, nemá rovnica riešenie (koreň).

Pr. 1

Rieš v R rovnicu: $\frac{3-x}{2}-\left(\frac{7-x}{3}-\frac{x+3}{4}\right)+\frac{7-x}{6}-\frac{9+7x}{8}+x=0$

$$\frac{3-x}{2}-\left(\frac{7-x}{3}-\frac{x+3}{4}\right)+\frac{7-x}{6}-\frac{9+7x}{8}+x=0 \qquad /\cdot 24$$

$$12(3-x)-8(7-x)+6(x+3)+4(7-x)-3(9+7x)+24x=0$$
$$36-12x-56+8x+6x+18+28-4x-27-21x+24x=0$$
$$x-1=0$$
$$x=1$$

Vynásobíme rovnicu najmenším spoločným násobkom menovateľov, aby sme odstránili zlomky.
Zátvorky odstránime roznásobením.

Skúška: $L(1)=\frac{3-1}{2}-\left(\frac{7-1}{3}-\frac{1+3}{4}\right)+\frac{7-1}{6}-\frac{9+7}{8}+1=$

$=\frac{2}{2}-\left(\frac{6}{3}-\frac{4}{4}\right)+\frac{6}{6}-\frac{16}{8}+1=1-2+1+1-2+1=0$; $P(1)=0$; $L=P$; $K=\{1\}$

Urobíme skúšku, aj keď nie je nutná, pretože všetky úpravy boli ekvivalentné.

Pr. 2

Rieš v R rovnicu: $\frac{3+2x}{2}-\left(\frac{7}{6}-\frac{12x-1}{3}\right)=5x$

$$\frac{3+2x}{2}-\left(\frac{7}{6}-\frac{12x-1}{3}\right)=5x \qquad /\cdot 6$$
$$3(3+2x)-7+2(12x-1)=30x$$
$$9+6x-7+24x-2=30x$$
$$30x=30x$$
$$0=0$$

$K=R$ Rovnica má nekonečne veľa riešení.

Pr. 3

Rieš v R rovnicu: $\frac{3x-1}{3}-(x-1)=\frac{3x-2}{6}-\frac{x}{2}$

$$\frac{3x-1}{3}-(x-1)=\frac{3x-2}{6}-\frac{x}{2} \qquad /\cdot 6$$
$$2(3x-1)-6(x-1)=3x-2-3x$$
$$6x-2-6x+6=-2$$
$$0x+4=-2$$
$$0\neq -6$$

$K=\emptyset$ Rovnica nemá žiadne riešenie.

Lineárne rovnice s neznámou v menovateli

Pri riešení týchto rovníc musíme vždy určiť ich obor definície a po vyriešení rovnice overiť, či všetky vypočítané korene patria do tohto oboru definície. Ak neurčíme definičný obor neznámej, tak musíme urobiť skúšku.

Pr. 4

Rieš v R rovnicu: $\frac{3}{x+1}=\frac{2}{x+3}+\frac{1}{x-2}$

Podmienky: $\left.\begin{array}{l} x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -1 \\ x+3\neq 0 \Rightarrow x\neq -3 \\ x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow D=R-\{-1;-3;2\}$

$$\frac{3}{x+1}=\frac{2}{x+3}+\frac{1}{x-2} \qquad /\cdot(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x-2)$$

$$3(x+3)(x-2)=2(x+1)(x-2)+(x+1)(x+3)$$
$$3x^2+3x-18=2x^2-2x-4+x^2+4x+3$$
$$3x^2+3x-18=3x^2+2x-1$$
$$x=17$$

$x\in D \Rightarrow K=\{17\}$

Pr. 5

Rieš v R rovnicu: $\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2-x}+\frac{x^2-2}{x^2-1}=1$

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{x(x-1)}+\frac{x^2-2}{(x-1)(x+1)}=1$$

Upravíme menovateľov v rovnici, aby sme ľahšie určili podmienky.

Podmienky: $x \neq 0 \wedge x \neq \pm 1 \Rightarrow \mathsf{D} = \mathsf{R} - \{0; -1; 1\}$

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{x(x-1)}+\frac{x^2-2}{(x-1)(x+1)}=1 \qquad / \cdot (x+1)\cdot(x-1)\cdot x$$

$$x-1+x+1+(x^2-2)x = x^3-x$$

$$2x+x^3-2x = x^3-x$$

$$x=0 \qquad x \notin \mathsf{D} \Rightarrow \mathsf{K} = \emptyset$$

Lineárne rovnice s absolútnou hodnotou

Snažíme sa AH odstrániť

Pri riešení týchto rovníc vychádzame z definície **ABSOLÚTNEJ HODNOTY VÝRAZU** $M(x)$ obsahujúceho premennú x, pre ktorú platí:

- $|M(x)| = M(x)$, ak $M(x) > 0$,
- $|M(x)| = 0$, ak $M(x) = 0$,
- $|M(x)| = -M(x)$, ak $M(x) < 0$.

Metóda, ktorú používame pri riešení rovníc s absolútnou hodnotou, sa nazýva **METÓDA INTERVALOV**. Tieto intervaly súvisia s tzv. nulovými bodmi. Nulovými bodmi sú tie hodnoty premenných, pre ktoré výrazy v jednotlivých absolútnych hodnotách nadobúdajú hodnotu nula. Rovnicu riešime pre každý interval samostatne tak, že využívajúc definíciu absolútnej hodnoty, nahradzujeme absolútne hodnoty výrazmi bez absolútnej hodnoty. Takto dostaneme toľko čiastkových oborov pravdivosti K_i, koľko je intervalov. Výsledný obor pravdivosti je zjednotením čiastkových oborov pravdivosti.

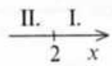
Kvôli zjednodušeniu výpočtov spájame prvé dva prípady do jedného, čiže $|M(x)| = M(x)$, ak $M(x) \geq 0$.

Ak je v rovnici len jedna absolútna hodnota s premennou, tak máme jeden nulový bod a dva intervaly (pozri príklady 6 a 7). Ak sú v rovnici dve absolútne hodnoty s premennou, tak máme dva nulové body a tri intervaly (pozri príklad 8). Ak je v rovnici k absolútnych hodnôt s premennou, tak dostaneme k nulových bodov a $k+1$ intervalov (pozri príklad 9).

Pr. 6

Rieš v R rovnicu: $3+4|x-2| = 5x$

$$4|x-2| = 5x-3 \Rightarrow 5x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{5}$$



Nulový bod: $x-2=0 \Rightarrow x=2$

I. $x \in \langle 2, \infty) \Rightarrow x-2 \geq 0$

$$3+4(x-2)=5x$$
$$3+4x-8=5x$$
$$-5=x$$

$x=-5 \notin \langle 2, \infty) \Rightarrow \mathsf{K}_1 = \emptyset$

II. $x \in (-\infty, 2) \Rightarrow x-2<0$

$$3+4(-x+2)=5x$$
$$3-4x+8=5x$$
$$11=9x$$
$$x=\frac{11}{9}$$

$x=\frac{11}{9} \in (-\infty, 2) \Rightarrow \mathsf{K}_2 = \left\{\frac{11}{9}\right\}$

Nulový bod rozdelí číselnú os na dva intervaly. Riešime úlohu v jednotlivých intervaloch.

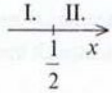
Zistíme, či koreň patrí do daného definičného oboru. Výsledné riešenie je zjednotením riešení v jednotlivých intervaloch.

$$\mathsf{K} = \mathsf{K}_1 \cup \mathsf{K}_2 = \emptyset \cup \left\{\frac{11}{9}\right\} = \left\{\frac{11}{9}\right\}$$

Pr. 7

Rieš v R rovnicu: $3x-|2x-1|=x+1$

$|2x-1|=2x-1 \Rightarrow 2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{1}{2}$



Nulový bod: $2x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

I. $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow 2x-1<0$

$$3x-(-2x+1)=x+1$$
$$4x=2$$
$$x=\frac{1}{2}$$
$$x=\frac{1}{2} \notin \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow K_1=\emptyset$$

II. $x \in \left\langle \dfrac{1}{2}, \infty\right) \Rightarrow 2x-1 \geq 0$

$$3x-(2x-1)=x+1$$
$$x+1=x+1$$
$$0=0$$
$$K_2=\left\langle \frac{1}{2}, \infty\right)$$

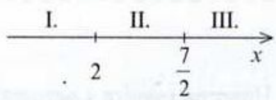
Túto rovnicu spĺňajú všetky x z oboru definície.

$$K=K_1 \cup K_2=\emptyset \cup \left\langle \frac{1}{2}, \infty\right)=\left\langle \frac{1}{2}, \infty\right)$$

Pr. 8

Rieš v R rovnicu: $|2x-7|+|x-2|=3$

Nulové body: $2x-7=0 \Rightarrow x_1=\dfrac{7}{2}$, $x-2=0 \Rightarrow x_2=2$



I. $x \in (-\infty, 2)$

$$-2x+7-x+2=3$$
$$-3x=-6$$
$$x=2$$
$$x=2 \notin (-\infty, 2) \Rightarrow K_1=\emptyset$$

II. $x \in \left\langle 2, \dfrac{7}{2}\right)$

$$-2x+7+x-2=3$$
$$-x=-2$$
$$x=2$$
$$x=2 \in \left\langle 2, \frac{7}{2}\right) \Rightarrow K_2=\{2\}$$

III. $x \in \left\langle \dfrac{7}{2}, \infty\right)$

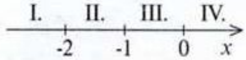
$$2x-7+x-2=3$$
$$3x=12$$
$$x=4$$
$$x=4 \in \left\langle \frac{7}{2}, \infty\right) \Rightarrow K_3=\{4\}$$

$$K=K_1 \cup K_2 \cup K_3=\{2; 4\}$$

Pr. 9

Rieš v R rovnicu: $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$

Nulové body: $x_1=0$, $x+1=0 \Rightarrow x_2=-1$, $x+2=0 \Rightarrow x_3=-2$



I. $x \in (-\infty, -2)$

$$-x-2(-x-1)+3(-x-2)=0$$
$$-x+2x+2-3x-6=0$$
$$-2x=4$$
$$x=-2$$
$$x=-2 \notin (-\infty, -2) \Rightarrow K_1=\emptyset$$

II. $x \in \langle -2, -1)$

$$-x-2(-x-1)+3(x+2)=0$$
$$-x+2x+2+3x+6=0$$
$$4x=-8$$
$$x=-2$$
$$x=-2 \in \langle -2, -1) \Rightarrow K_2=\{-2\}$$

III. $x \in \langle -1, 0)$

$$-x-2(x+1)+3(x+2)=0$$
$$-x-2x-2+3x+6=0$$
$$0 \neq -4$$
$$K_3=\emptyset$$

IV. $x \in \langle 0, \infty)$

$$x-2(x+1)+3(x+2)=0$$
$$x-2x-2+3x+6=0$$
$$2x=-4$$
$$x=-2$$
$$x=-2 \notin \langle 0, \infty) \Rightarrow K_4=\emptyset$$

$$K=K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4=\{-2\}$$

Vyjadrenie neznámej zo vzorca

Pri vyjadrovaní neznámej zo vzorca postupujeme tak, akoby sme riešili rovnicu, čiže pomocou ekvivalentných úprav daného vzťahu sa snažíme osamostatniť neznámu.

Pr. 10

Z daných vzorcov vyjadri neznáme veličiny uvedené v hranatej zátvorke:

a) $F = ma \quad [m, a]$ **b)** $E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad [m]$ **c)** $m_1 c_1 (t - t_1) = m_2 c_2 (t_2 - t) \quad [t_1, t, c_1]$

a) $m = \frac{F}{a},\ a = \frac{F}{m}$

b) $m = \frac{2E_k}{v^2}$

c) t_1 ... $t_1 = \frac{m_1 c_1 t - m_2 c_2 t_2 + m_2 c_2 t}{m_1 c_1}$

c_1 ... $c_1 = \frac{m_2 c_2 (t_2 - t)}{m_1 (t - t_1)}$

t ... $m_1 c_1 t + m_2 c_2 t = m_2 c_2 t_2 + m_1 c_1 t_1$

$t(m_1 c_1 + m_2 c_2) = m_2 c_2 t_2 + m_1 c_1 t_1$

$t = \frac{m_2 c_2 t_2 + m_1 c_1 t_1}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$

Podmienky:

a) $a \neq 0,\ m \neq 0$

b) $v \neq 0$

c) $m_1 \neq 0,\ c_1 \neq 0,\ t \neq t_1,\ m_1 c_1 \neq -m_2 c_2$

Lineárne rovnice s parametrom

ROVNICE S PARAMETROM sú rovnice, ktoré obsahujú okrem neznámej (napr. x) ešte ďalšiu premennú (označujeme ju napr. p), ktorú voláme parameter. LINEÁRNE ROVNICE S PARAMETROM sú také rovnice s parametrom, v ktorých sa premenná x vyskytuje len v prvej mocnine.

Parametre ovplyvňujú hodnotu premennej s ohľadom na vykonávané operácie, a preto musíme urobiť diskusiu riešenia vzhľadom na parameter.

Rovnice s parametrom predstavujú súhrnný zápis množiny rovníc, ktoré by sme dostali dosadením všetkých prípustných hodnôt za parameter. Ak riešime rovnicu s parametrom, tak hľadáme korene v závislosti od hodnoty parametra.

Pr. 11

Rieš rovnicu $(2p-1)x - 6 = px$ s neznámou $x \in \mathrm{R}$ a parametrom $p \in \mathrm{R}$.

$$2px - x - 6 = px$$
$$2px - x - px = 6$$
$$x(p-1) = 6 \qquad / : (p-1)$$

$p - 1 = 0 \Rightarrow p = 1$

$x \cdot 0 = 6$

$\mathrm{K} = \emptyset$

$p - 1 \neq 0 \Rightarrow p \neq 1$

$x = \frac{6}{p-1}$

$\mathrm{K} = \left\{\frac{6}{p-1}\right\}$

p	K
$p = 1$	$\mathrm{K} = \emptyset$
$p \neq 1$	$\mathrm{K} = \left\{\frac{6}{p-1}\right\}$

Jednotlivé výsledky zapisujeme do súhrnnej tabuľky.

Ak by bola v zadaní podmienka, že $x \in \mathrm{N}$, $p \in \mathrm{N}$, tak by bol výsledok príkladu ovplyvnený aj týmito podmienkami a bol by tento:

p	K
$p = 1$	$\mathrm{K} = \emptyset$
$p = 2$	$\mathrm{K} = \{6\}$
$p = 3$	$\mathrm{K} = \{3\}$
$p = 4$	$\mathrm{K} = \{2\}$
$p = 7$	$\mathrm{K} = \{1\}$

Pr. 12

Rieš rovnicu $\dfrac{2}{p(x-3)}+\dfrac{3}{(p-1)(x+1)}=\dfrac{x-5}{p(x+1)(x-3)}$ s neznámou $x \in \mathsf{R}$ a parametrom $p \in \mathsf{R}$.

Podmienky: $p \neq 0,\ p \neq 1,\ x \neq -1,\ x \neq 3 \Rightarrow \mathsf{D}=\mathsf{R}-\{-1;3\}$

$$\frac{2}{p(x-3)}+\frac{3}{(p-1)(x+1)}=\frac{x-5}{p(x+1)(x-3)} \qquad / \cdot p(p-1)(x+1)(x-3)$$

$$2(x+1)(p-1)+3p(x-3)=(x-5)(p-1)$$

$$2xp-2x+2p-2+3px-9p=xp-x-5p+5$$

$$x(4p-1)=2p+7 \qquad / :(4p-1)$$

$4p-1=0 \Rightarrow p=\dfrac{1}{4}$

$x \cdot 0=\dfrac{15}{2}$

$\mathsf{K}=\varnothing$

$4p-1 \neq 0 \Rightarrow p \neq \dfrac{1}{4}$

$x=\dfrac{2p+7}{4p-1}$

$\mathsf{K}=\left\{\dfrac{2p+7}{4p-1}\right\}$

$x \neq -1$: $-1 \neq \dfrac{2p+7}{4p-1}$, $-4p+1 \neq 2p+7$, $-6 \neq 6p$, $p \neq -1$

$x \neq 3$: $3 \neq \dfrac{2p+7}{4p-1}$, $12p-3 \neq 2p+7$, $10p \neq 10$, $p \neq 1$

p	K
$p=0 \vee p=1$	Rovnica nie je definovaná.
$p=-1 \vee p=\dfrac{1}{4}$	$\mathsf{K}=\varnothing$
$p \neq \pm 1 \wedge p \neq 0 \wedge \wedge p \neq \dfrac{1}{4}$	$\mathsf{K}=\left\{\dfrac{2p+7}{4p-1}\right\}$

Sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi

SÚSTAVOU DVOCH LINEÁRNYCH ROVNÍC S DVOMA NEZNÁMYMI nazývame dvojicu lineárnych rovníc s dvoma neznámymi, ktoré spolu súvisia. **RIEŠENÍM SÚSTAVY** dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi nazývame takú usporiadanú dvojicu čísel $[x; y]$, ktorá po dosadení do obidvoch rovníc sústavy za príslušné premenné zmení každú z týchto rovníc na pravdivý výrok o rovnosti čísel.

Sústavu rovníc môžeme riešiť graficky (približný výsledok) alebo niekoľkými počtovými (numerickými) metódami: porovnávacou, dosadzovacou alebo sčítacou.

Všeobecný zápis sústavy dvoch rovníc s dvoma neznámymi: $\begin{aligned} ax+by&=c \\ dx+ey&=f \end{aligned}$
kde a, b, c, d, e, f (koeficienty) sú ľubovoľné reálne čísla a x, y sú neznáme.

Pr. 13

Sústavu rovníc rieš numericky i graficky v R^2: $\begin{aligned} 3x-2y&=4 \\ x+3y&=5 \end{aligned}$

Numerické riešenie (sčítacia metóda):

① $3x-2y=4$

② $x+3y=5 \quad / \cdot (-3)$

$-11y=-11$

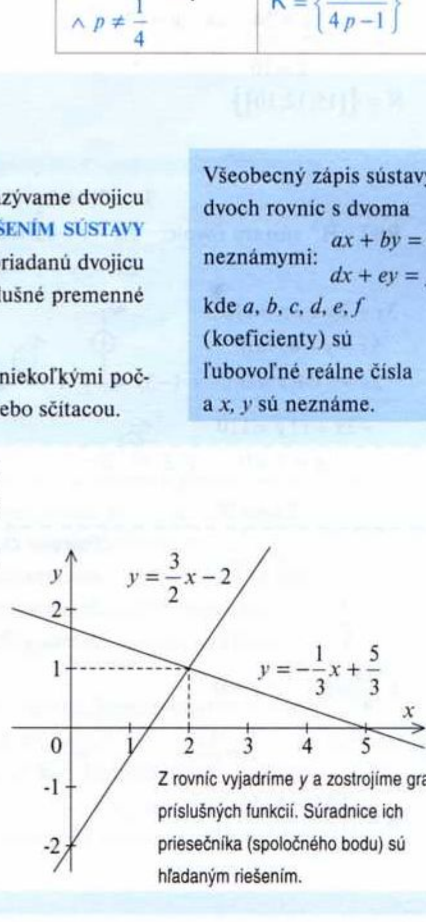
$y=1$

$3x-2=4 \Rightarrow x=2$

$\mathsf{K}=\{[2;1]\}$

Dosadíme za y do rovnice ① a dopočítame x.

Grafické riešenie:



Z rovníc vyjadríme y a zostrojíme grafy príslušných funkcií. Súradnice ich priesečníka (spoločného bodu) sú hľadaným riešením.

Sústavy troch lineárnych rovníc s troma neznámymi

SÚSTAVOU TROCH LINEÁRNYCH ROVNÍC S TROMA NEZNÁMYMI nazývame trojicu lineárnych rovníc s troma neznámymi, ktoré spolu súvisia. RIEŠENÍM SÚSTAVY troch lineárnych rovníc s troma neznámymi nazývame takú usporiadanú trojicu čísel $[x; y; z]$, ktorá po dosadení do všetkých rovníc sústavy za príslušné premenné zmení každú z týchto rovníc na pravdivý výrok o rovnosti čísel.

Pri riešení sústavy troch lineárnych rovníc používame rovnaké numerické metódy ako pri riešení sústavy dvoch lineárnych rovníc.

Všeobecný zápis sústavy troch rovníc s troma neznámymi:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

kde $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$ (koeficienty) sú ľubovoľné reálne čísla a x, y, z sú neznáme.

Pr. 14

Rieš v R^3 sústavu rovníc: $\begin{aligned} x+y-z&=17 \\ x+z-y&=13 \\ y+z-x&=7 \end{aligned}$

$$\begin{aligned} x+y-z&=17 && ① \\ x-y+z&=13 && ② \\ -x+y+z&=7 && ③ \end{aligned}$$

$$2x=30 \Rightarrow x=15$$
$$2y=24 \Rightarrow y=12$$
$$z=10$$

$\mathrm{K}=\{[15;12;10]\}$

Použijeme sčítaciu metódu:
Sčítame 1. a 2. rovnicu a 1. a 3. rovnicu.

Neznámu z dopočítame dosadením za x, y do ľubovoľnej z rovníc ①, ②, ③.

Pr. 15

Rieš v R^3 sústavu rovníc: $\begin{aligned} 3x+2y+3z&=110 \\ 5x-y-4z&=0 \\ 2x-3y+z&=0 \end{aligned}$

$$\begin{aligned} 3x+2y+3z&=110 \\ 5x-y-4z&=0 \\ 2x-3y+z&=0 \quad /\cdot(-3) \quad /\cdot 4 \quad ② \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x+11y&=110 \\ x-y&=0 \quad /\cdot 3 \quad ① \end{aligned}$$

$$8y=110$$
$$y=\frac{55}{4}$$

Dosadíme za y do rovnice ①.
Dosadíme za x, y do rovnice ②.

$$x=\frac{55}{4}$$
$$2\cdot\frac{55}{4}-3\cdot\frac{55}{4}+z=0$$
$$z=\frac{55}{4}$$

$\mathrm{K}=\left\{\left[\frac{55}{4};\frac{55}{4};\frac{55}{4}\right]\right\}$

Pr. 16

Rieš v R^3 sústavu rovníc: $\begin{aligned} x+y-z&=5 \\ 2x+2y-2z&=7 \\ x-3y+5z&=15 \end{aligned}$

$$\begin{aligned} x+y-z&=5 \\ 2x+2y-2z&=7 \quad /:2 \\ x-3y+5z&=15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y-z&=5 \\ x+y-z&=\frac{7}{2} \\ x-3y+5z&=15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0&\neq\frac{3}{2} \\ x-3y+5z&=15 \end{aligned}$$

$\mathrm{K}=\emptyset$

Sústava nemá riešenie.

Pr. 17

Rieš v R^3 sústavu rovníc: $\begin{aligned} x+y-z&=5 \\ 2x+2y-2z&=10 \\ x-3y+5z&=15 \end{aligned}$

$$\begin{aligned} x+y-z&=5 \\ 2x+2y-2z&=10 \quad /:2 \\ x-3y+5z&=15 \end{aligned}$$

Upravíme pôvodnú sústavu rovníc.

$$\begin{aligned} x+y-z&=5 \\ x+y-z&=5 \\ x-3y+5z&=15 \end{aligned}$$

Prvé dve rovnice sú rovnaké, v ďalšom výpočte budeme pracovať len s jednou z nich.

$$\begin{aligned} x+y-z&=5 \\ x-3y+5z&=15 \end{aligned}$$

Je to vlastne sústava dvoch rovníc s troma neznámymi. Jednu z neznámych zvolíme za parameter, napr. $z=t$.

$$\begin{aligned} x+y-t&=5 \quad /\cdot 3 \quad ① \\ x-3y+5t&=15 \end{aligned}$$

To je sústava dvoch rovníc s dvoma neznámymi x, y s parametrom $t\in\mathrm{R}$.

$$4x=30-2t$$

$$x=\frac{15}{2}-\frac{1}{2}t$$

Dosadíme za x do rovnice ① a dopočítame hodnotu neznámej y.

$$\frac{15}{2}-\frac{1}{2}t+y=5+t$$

$$y=5-\frac{15}{2}+t+\frac{t}{2}$$

$$y=-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}t$$

$$K=\left\{\left[\frac{15}{2}-\frac{t}{2};-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}t;\, t\in\mathrm{R}\right]\right\}$$

Riešenie slovných úloh

Ak v praxi riešime slovné úlohy, tak používame rôzne typy rovníc, sústavy rovníc, nerovnice, prípadne sústavy nerovníc.

Pri riešení slovných úloh postupujeme takto:

- Slovné úlohy sú vždy zadané súborom viet v určitom jazyku (slovenčina, čeština a pod.). Text úlohy si musíme dobre prečítať (aj niekoľkokrát), aby sme pochopili, akú veličinu máme z uvedených údajov zistiť a aké sú vzťahy medzi veličinami, ktoré sa v úlohe vyskytujú.
- Hľadanú veličinu si označíme písmenom (buď x, y, z alebo takým, ktoré nám pripomína význam premennej, napr. d - počet dievčat, c - počet chlapcov), určíme jej obor definície, nazveme ju premennou (resp. neznámou) a pomocou nej opíšeme slovné vyjadrenie zadania použitím matematickej symboliky.
- Uvedomíme si, aký algebrický útvar (rovnicu, nerovnicu, ...) sme dostali. Tento potom pomocou zaužívaných postupov riešime, a tak získame hodnotu neznámej veličiny.
- Vykonáme skúšku dosadením „do textu“, čím overíme nielen to, či sme zostavili rovnicu správne, ale aj to, či vypočítaná hodnota neznámej je správna.
- Na záver výsledok interpretujeme - vyjadríme ho slovne. To znamená, že napíšeme odpoveď, prípadne nakreslime graf a pod.

10. Kvadratické rovnice

Obsah kapitoly:

Pojem kvadratická rovnica

KVADRATICKÁ ROVNICA je rovnica vyjadrená v tvare $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \in \mathrm{R}$, $a \neq 0$, $b \in \mathrm{R}$, $c \in \mathrm{R}$. Neznámou je x, ax^2 je KVADRATICKÝ ČLEN, bx LINEÁRNY ČLEN a c ABSOLÚTNY ČLEN.
Čísla a, b, c nazývame aj KOEFICIENTY KVADRATICKEJ ROVNICE.

Typy kvadratických rovníc a ich riešenie

Kvadratická rovnica v tvare $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathrm{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$) sa nazýva aj VŠEOBECNÁ KVADRATICKÁ ROVNICA.

Pre jej korene v R platí vzorec:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Diskriminant ovplyvňuje počet aj druh koreňov v R a v C.
Pre korene v C platí vzorec:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}.$$

Výraz $D = b^2 - 4ac$ sa nazýva DISKRIMINANT.

- Ak je $D > 0$, má kvadratická rovnica v R dva rôzne korene.
- Ak je $D = 0$, má kvadratická rovnica v R jeden tzv. DVOJNÁSOBNÝ KOREŇ.
- Ak je $D < 0$, nemá kvadratická rovnica v R žiaden koreň; v množine C má dva komplexne združené korene.

Pri riešení kvadratickej rovnice vypočítame najprv D a až potom rovnicu riešime, hľadáme jej korene.

Rozdelenie kvadratických rovníc podľa hodnôt koeficientov b a c:

$b = 0$	$c = 0$
Rovnica má tvar $ax^2 + c = 0$ a nazýva sa RÝDZO KVADRATICKÁ ROVNICA. Jej riešením v R je $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, teda dva navzájom opačné korene.	Rovnica má tvar $ax^2 + bx = 0$ a nazýva sa KVADRATICKÁ ROVNICA BEZ ABSOLÚTNEHO ČLENA. Riešime ju vynímaním: $x(ax + b) = 0$. Jej jedným koreňom je $x_1 = 0$, druhým $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Každú kvadratickú rovnicu môžeme previesť na normovaný tvar (normovať). Urobíme to tak, že všeobecnú kvadratickú rovnicu $ax^2 + bx + c = 0$ vydelíme koeficientom a. Dostaneme rovnicu $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.
Zavedieme nové koeficienty $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$ a rovnicu prepíšeme. Rovnica v tvare $x^2 + px + q = 0$ sa nazýva NORMOVANÁ KVADRATICKÁ ROVNICA.

Vzťahy medzi koreňmi a koeficientmi kvadratickej rovnice

O koreňoch x_1, x_2 všeobecnej kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, prípadne normovanej kvadratickej rovnice $x^2 + px + q = 0$ platí:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
$x_1 + x_2 = -p$	$x_1 \cdot x_2 = q$

Uvedené vzťahy nazývame VIETOVE VZORCE.

Ak má kvadratická rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ korene x_1, x_2, tak platí $ax^2 + bx + c = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$.
Výrazy $x - x_1$, $x - x_2$ sa nazývajú **KOREŇOVÉ ČINITELE**.

Pr. 1

Rieš v R rovnicu: **a)** $5x^2 - 18x - 8 = 0$ **b)** $9x^2 - 12x + 9 = 0$

a) $D = 324 + 160 = 484;\ x_{1,2} = \dfrac{18 \pm \sqrt{484}}{10} = \dfrac{18 \pm 22}{10} \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = -\dfrac{2}{5};\ K = \left\{4; -\dfrac{2}{5}\right\}$

b) $D = 144 - 324 = -180;\ D < 0 \Rightarrow K = \emptyset$

$x_{1,2} = \dfrac{12 \pm i\sqrt{|-180|}}{18} = \dfrac{12 \pm 6i\sqrt{5}}{18} = \dfrac{2 \pm i\sqrt{5}}{3};\ K = \left\{\dfrac{2 \pm i\sqrt{5}}{3}\right\}$

Rovnica nemá riešenie v množine R. Ak by sme uvažovali o riešení v C, malo by uvedený tvar.

Pr. 2

Rieš v R rovnicu: $\dfrac{x+3}{x-3} + \dfrac{x-1}{x-5} = 4$

Podmienky: $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3,\ x - 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5,\ D = R - \{3; 5\}$

$$\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-1}{x-5} = 4 \qquad / \cdot (x-3)(x-5)$$
$$(x+3)(x-5) + (x-1)(x-3) = 4(x-3)(x-5)$$
$$x^2 - 2x - 15 + x^2 - 4x + 3 = 4x^2 - 32x + 60$$
$$2x^2 - 26x + 72 = 0 \qquad / : 2$$
$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

$D = 169 - 144 = 25;\ x_{1,2} = \dfrac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{13 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = 9, x_2 = 4$

$x_1 = 9 \in D \wedge x_2 = 4 \in D \Rightarrow K = \{9; 4\}$

Pr. 3

Rieš v R rovnicu: $\dfrac{\dfrac{x}{3} - \dfrac{x-1}{2}}{\dfrac{x}{3} - \dfrac{x+1}{4}} = x$

$$\frac{\dfrac{2x - 3x + 3}{6}}{\dfrac{4x - 3x - 3}{12}} = x$$

$$\frac{-x+3}{6} \cdot \frac{12}{x-3} = x$$

Odkiaľ vyplýva $D = R - \{3\}$.

$$\frac{2(-x+3)}{x-3} = x \qquad / \cdot (x-3)$$
$$-2x + 6 = x^2 - 3x$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$

$D = 1 + 24 = 25;\ x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -2$

$x_1 = 3 \notin D \wedge x_2 = -2 \in D \Rightarrow K = \{-2\}$

Pr. 4

Zostav kvadratickú rovnicu $x^2 + px + q = 0$, ktorá má korene:

a) štyrikrát väčšie, **b)** o štyri väčšie,

než sú korene rovnice $x^2 - 9x + 15 = 0$, pričom túto rovnicu nerieš.

a) $X_1 = 4x_1, X_2 = 4x_2$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 9 \\ x_1 \cdot x_2 &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= -p \\ X_1 \cdot X_2 &= q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 &= -p \\ 4x_1 \cdot 4x_2 &= q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4(x_1 + x_2) &= -p \\ 16x_1 x_2 &= q \end{aligned}$$

$$4 \cdot 9 = -p \Rightarrow p = -36$$
$$16 \cdot 15 = q \Rightarrow q = 240$$

$x^2 - 36x + 240 = 0$

b) $X_1 = x_1 + 4, X_2 = x_2 + 4$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 9 \\ x_1 \cdot x_2 &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= -p \\ X_1 \cdot X_2 &= q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 4 + x_2 + 4 &= -p \\ (x_1 + 4) \cdot (x_2 + 4) &= q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 8 &= -p \\ x_1 x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16 &= q \end{aligned}$$

$$9 + 8 = -p \Rightarrow p = -17$$
$$15 + 4 \cdot 9 + 16 = q \Rightarrow q = 67$$

$x^2 - 17x + 67 = 0$

Zapíšeme vzťahy medzi koreňmi hľadanej a danej rovnice.

Zapíšeme vzťahy medzi koreňmi x_1, x_2 pôvodnej rovnice $x^2 - 9x + 15 = 0$.

Zapíšeme vzťahy medzi koreňmi X_1, X_2 a koeficientmi hľadanej rovnice $x^2 + px + q = 0$.

Dosadíme do rovníc čísla za $x_1 + x_2$ a $x_1 \cdot x_2$.

Určíme koeficienty kvadratickej rovnice a rovnicu zapíšeme.

Pr. 5

Zostav kvadratickú rovnicu s reálnymi koeficientmi, ktorej jedným koreňom je číslo $x_1 = \dfrac{2+i}{1-i}$.

$x^2 + px + q = 0$

$$x_1 = \frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+3i}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3i}{2}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p \\ x_1 \cdot x_2 &= q \end{aligned}$$

$$\frac{1+3i}{2} + \frac{1-3i}{2} = -p \Rightarrow p = -1$$

$$\frac{1+3i}{2} \cdot \frac{1-3i}{2} = q \Rightarrow q = \frac{5}{2}$$

$x^2 - x + \frac{5}{2} = 0$

Zapíšeme hľadaný tvar kvadratickej rovnice.

Určíme algebrický tvar komplexného čísla $x_1 = \dfrac{2+i}{1-i}$.

Určíme druhý koreň rovnice.

Vieme, že korene kvadratickej rovnice s reálnymi koeficientmi sú čísla komplexne združené.

Použijeme Vietove vzťahy pre korene normovanej kvadratickej rovnice a nájdeme koeficienty p, q.

Môžeme upraviť na tvar $2x^2 - 2x + 5 = 0$.

Kvadratická rovnica s parametrom

KVADRATICKÉ ROVNICE S PARAMETROM sú také rovnice s parametrom, ktoré obsahujú aspoň jeden člen s druhou mocninou neznámej, no mocnina neznámej v žiadnom jej člene nie je vyššia ako druhá.

Parametre ovplyvňujú hodnotu premennej s ohľadom na vykonávané operácie, a preto musíme urobiť diskusiu riešenia vzhľadom na parameter, tak ako pri lineárnych rovniciach s parametrom (kapitola č. 9).

Pr. 6

Rieš v R rovnicu: $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + (m-2) = 0$, pričom x je premenná a $m \in \mathrm{R}$ je parameter.

I. $m = 1 \Rightarrow -2 \cdot 2x + (1-2) = 0$ — Rovnica je lineárna.

$$x = -\frac{1}{4}$$

II. $m \neq 1 \Rightarrow (m-1)x^2 - 2(m+1)x + (m-2) = 0$ — Rovnica je kvadratická.

$D = 4(m+1)^2 - 4(m-1)(m-2) =$ — Určíme jej diskriminant.

$= 4m^2 + 8m + 4 - 4m^2 + 12m - 8 = 20m - 4 = 4(5m-1)$

$D > 0 \Leftrightarrow 5m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{5}$ $\quad x_{1,2} = \frac{2(m+1) \pm 2\sqrt{5m-1}}{2(m-1)} = \frac{m+1 \pm \sqrt{5m-1}}{m-1}$

$D = 0 \Leftrightarrow 5m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{5}$ $\quad x_{1,2} = -\frac{3}{2}$

$D < 0 \Leftrightarrow 5m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{5}$ $\quad \mathrm{K} \not\subset \mathrm{R}$ — Rovnica nemá riešenie v R.

m	K
$m = 1$	$\mathrm{K} = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$
$m \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$	$\mathrm{K} = \emptyset$
$m = \frac{1}{5}$	$\mathrm{K} = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$
$m \in \left(\frac{1}{5}, 1\right) \cup (1, \infty)$	$\mathrm{K} = \left\{\frac{m+1 \pm \sqrt{5m-1}}{m-1}\right\}$

Pr. 7

Urči, kedy má rovnica z predchádzajúceho príkladu dva reálne rôzne korene:

a) oba kladné, **b)** oba záporné,

c) jeden kladný a jeden záporný, **d)** práve jeden koreň rovný nule.

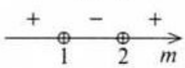
Rovnica bude mať dva rôzne reálne korene pre $m \in \left(\frac{1}{5}, 1\right) \cup (1, \infty)$.

$$(m-1)x^2 - 2(m+1)x + (m-2) = 0$$

$$x^2 - 2\frac{m+1}{m-1}x + \frac{m-2}{m-1} = 0$$

Určíme normovaný tvar rovnice $x^2 + px + q = 0$, čiže: $p = -2\frac{m+1}{m-1}$, $q = \frac{m-2}{m-1}$.

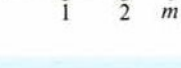
a) $x_1 > 0 \wedge x_2 > 0 \Leftrightarrow -p > 0 \wedge q > 0 \Leftrightarrow \frac{m+1}{m-1} > 0 \wedge \frac{m-2}{m-1} > 0 \Leftrightarrow$

$\wedge$


$\Leftrightarrow m \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \quad \wedge \quad m \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \Leftrightarrow m \in (2, \infty)$

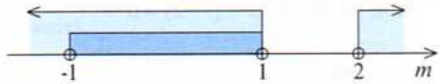
$m \in \left(\frac{1}{5}, 1\right) \cup (1, \infty) \wedge m \in (2, \infty) \Leftrightarrow m \in (2, \infty)$

b) $x_1 < 0 \wedge x_2 < 0 \Leftrightarrow -p < 0 \wedge q > 0 \Leftrightarrow \frac{m+1}{m-1} < 0 \wedge \frac{m-2}{m-1} > 0 \Leftrightarrow$

$\wedge$


$\Leftrightarrow m \in (-1,1) \qquad \wedge \qquad m \in (-\infty,1) \cup (2,\infty) \Leftrightarrow m \in (-1,1)$

$m \in \left(\frac{1}{5},1\right) \cup (1,\infty) \wedge m \in (-1,1) \Leftrightarrow m \in \left(\frac{1}{5},1\right)$



c) $x_1 > 0 \wedge x_2 < 0 \Leftrightarrow q < 0 \Leftrightarrow \frac{m-2}{m-1} < 0 \Leftrightarrow m \in (1,2)$

Tento záver vyplýva z prípadu b).

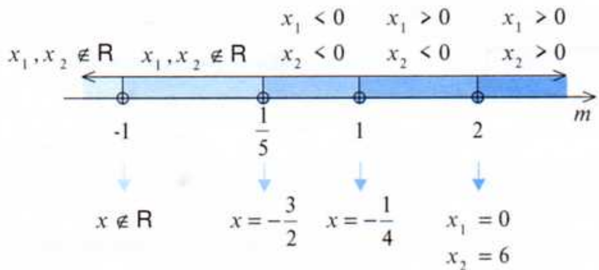
$m \in \left(\frac{1}{5},1\right) \cup (1,\infty) \wedge m \in (1,2) \Leftrightarrow m \in (1,2)$

d) $x_1 = 0 \wedge x_2 \neq 0 \Leftrightarrow q = 0 \Leftrightarrow \frac{m-2}{m-1} = 0 \Leftrightarrow m-2=0 \Leftrightarrow m=2$

$x^2 - 6x = 0$

Vypočítame oba korene.

$x(x-6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 6$



Riešenie môžeme prehľadne zapísať zobrazenou schémou.

Sústava lineárnej a kvadratickej rovnice

Túto sústavu riešime zvyčajne dosadzovacou metódou, čiže z lineárnej rovnice vyjadríme niektorú z neznámych, dosadíme do kvadratickej rovnice, riešime ju a substitučnou rovnicou dopočítame hodnotu druhej premennej.

Pr. 8

Rieš v R^2 sústavu rovníc: $\begin{matrix} x^2 = y \\ y - 5 = 0 \end{matrix}$

Numerické riešenie:

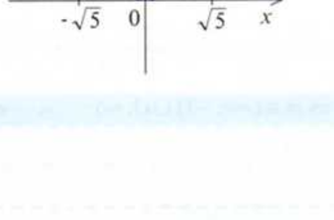
$$\begin{aligned} x^2 &= y \\ \underline{y-5=0} &\quad \Rightarrow y = 5 \\ x^2 - 5 &= 0 \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

$\mathrm{K} = \{[\sqrt{5};5];[-\sqrt{5};5]\}$

Grafické riešenie:

$$\begin{aligned} x^2 = y &\quad \Rightarrow y = x^2 \\ \underline{y-5=0} &\quad \Rightarrow y = 5 \end{aligned}$$

$\mathrm{K} = \{[\sqrt{5};5];[-\sqrt{5};5]\}$



Pr. 9

Rieš v R^2 sústavu rovníc: $\begin{matrix} 5x^2 - x - y^2 = 44 \\ y - 2x = 8 \end{matrix}$

$$\begin{aligned} 5x^2 - x - y^2 &= 44 \\ \underline{y - 2x = 8} &\quad \Rightarrow y = 8 + 2x \quad ① \\ 5x^2 - x - (8+2x)^2 &= 44 \\ 5x^2 - x - 64 - 32x - 4x^2 - 44 &= 0 \end{aligned}$$

Riešime opäť dosadzovacou metódou. Vyjadríme y z lineárnej rovnice a dosadíme do kvadratickej rovnice.

$x^2 - 33x - 108 = 0$ — Vyriešime kvadratickú rovnicu.

$D = 1\,089 + 432 = 1\,521;\ x_{1,2} = \dfrac{33 \pm \sqrt{1\,521}}{2} = \dfrac{33 \pm 39}{2} \Rightarrow x_1 = 36,\ x_2 = -3$ — Dosadíme za x do rovnice ① a dopočítame druhú neznámu.

$y_1 = 80,\ y_2 = 2$

$\mathrm{K} = \{[36; 80]; [-3; 2]\}$ — Zapíšeme riešenie sústavy rovníc.

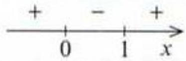
Kvadratická rovnica s absolútnou hodnotou

Kvadratickú rovnicu s absolútnou hodnotou riešime obdobne ako lineárnu rovnicu s absolútnou hodnotou, teda metódou intervalov a nulových bodov (pozri kapitolu č. 9).

Pr. 10

Rieš v R rovnicu: $|x^2 - x| = x$

Nulové body: $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$



Číselná os vyjadrujúca symbolicky kladnosť alebo zápornosť výrazu $x^2 - x$ v jednotlivých intervaloch.

I. $x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, \infty)$

$x^2 - x = x$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$

$x_1 = 0 \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, \infty) \wedge x_2 = 2 \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, \infty) \Rightarrow \mathrm{K}_1 = \{0; 2\}$

II. $x \in (0, 1)$

$-x^2 + x = x$

$x^2 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = 0$

$x_{3,4} = 0 \notin (0, 1) \Rightarrow \mathrm{K}_2 = \emptyset$

$\mathrm{K} = \mathrm{K}_1 \cup \mathrm{K}_2 = \{0, 2\} \cup \emptyset = \{0; 2\}$

Pr. 11

Rieš v R rovnicu: $x^2 - |3x - 4| = 0$

Nulový bod: $3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$

I. $x \in \left(-\infty, \dfrac{4}{3}\right)$

$x^2 - (-3x + 4) = 0$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$(x-1)(x+4) = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -4$

$x_1 = 1 \in \left(-\infty, \dfrac{4}{3}\right) \wedge x_2 = -4 \in \left(-\infty, \dfrac{4}{3}\right) \Rightarrow \mathrm{K}_1 = \{1, -4\}$

II. $x \in \left\langle \dfrac{4}{3}, \infty\right)$

$x^2 - (3x - 4) = 0$

$x^2 - 3x + 4 = 0$

$\mathrm{K}_2 = \emptyset$

Táto rovnica nemá v množine reálnych čísel riešenie, pretože diskriminant je záporný ($D < 0$).

$\mathrm{K} = \mathrm{K}_1 \cup \mathrm{K}_2 = \{1, -4\} \cup \emptyset = \{1; -4\}$

Pr. 12

Rieš v R rovnicu: $x^2 + |3x - 4| = 0$

$x^2 + |3x - 4| = 0$

$(|3x - 4| = 0 \wedge x^2 = 0) \Leftrightarrow \left(x = \frac{4}{3} \wedge x = 0\right)$

$\frac{4}{3} \neq 0$

$\mathsf{K} = \emptyset$

Súčet dvoch kladných výrazov sa rovná nule, pričom $|3x-4| \geq 0$ a $x^2 \geq 0$. To môže nastať jedine vtedy, ak sa oba sčítance rovnajú nule.

Pr. 13

Rieš v R rovnicu: $|x^2 - 4| + 3x = 0$

Nulové body: $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$

$+ \quad - \quad +$

$-2 \quad 2 \quad x$

Číselná os vyjadruje symbolicky kladnosť alebo zápornosť výrazu $x^2 - 4$ v jednotlivých intervaloch.

I. $x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$(x - 1)(x + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -4$

$x_1 = 1 \notin (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty) \wedge x_2 = -4 \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty) \Rightarrow \mathsf{K}_1 = \{-4\}$

II. $x \in (-2, 2)$

$-x^2 + 3x + 4 = 0 \qquad / \cdot (-1)$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x - 4)(x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = -1$

$x_1 = 4 \notin (-2, 2) \wedge x_2 = -1 \in (-2, 2) \Rightarrow \mathsf{K}_2 = \{-1\}$

$\mathsf{K} = \mathsf{K}_1 \cup \mathsf{K}_2 = \{-4; -1\}$

Pr. 14

Rieš v R rovnicu: $|x^2 + 2x + 2| = |x|$

Nulové body: $x = 0$, $x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow D < 0 \wedge x_{1,2} \notin \mathsf{R}$, $x^2 + 2x + 2 > 0$ pre $\forall x \in \mathsf{R}$

I. $x \in (-\infty, 0)$

$x^2 + 2x + 2 = -x$

$x^2 + 3x + 2 = 0$

$(x + 1)(x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -2$

$x_1 = -1 \in (-\infty, 0) \wedge x_2 = -2 \in (-\infty, 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathsf{K}_1 = \{-1; -2\}$

II. $x \in \langle 0, \infty)$

$x^2 + 2x + 2 = x$

$x^2 + x + 2 = 0;\ D = 1 - 8 = -7 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{1,2} \notin \mathsf{R} \Rightarrow \mathsf{K}_2 = \emptyset$

Diskriminant je záporný, preto rovnica nemá riešenie v obore reálnych čísel.

$\mathsf{K} = \mathsf{K}_1 \cup \mathsf{K}_2 = \{-1; -2\} \cup \emptyset = \{-1; -2\}$

Pr. 15

Rieš v R rovnicu: $\dfrac{3}{|x^2 - 3x - 4|} = \dfrac{1}{|x - 4|} + 1$

Nulové body: $x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 4, x_2 = -1,$
$x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 4 = x_1$

Tieto nulové body však nesmieme zaradiť do intervalov, pretože jednotlivé zlomky by neboli definované.

I. $x \in (-\infty, -1)$

$$\frac{3}{x^2-3x-4}=\frac{1}{-x+4}+1$$

$$\frac{3}{(x-4)(x+1)}=\frac{-1}{x-4}+1 \qquad / \cdot (x-4)\cdot(x+1)$$

$$3=-(x+1)+x^2-3x-4$$

$$3=-x-1+x^2-3x-4$$

$$0=x^2-4x-8;\ D=16+32=4\sqrt{3}$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm 4\sqrt{3}}{2}=2\pm 2\sqrt{3}$$

$$x_1=2+2\sqrt{3}\notin(-\infty,-1)\wedge x_2=2-2\sqrt{3}\in$$

$$\in(-\infty,-1)\Rightarrow \mathrm{K}_1=\left\{2-2\sqrt{3}\right\}$$

II. $x \in (-1, 4)$

$$\frac{3}{-(x^2-3x-4)}=\frac{1}{-x+4}+1$$

$$\frac{-3}{(x+1)(x-4)}=\frac{-1}{x-4}+1 \qquad / \cdot (x+1)\cdot(x-4)$$

$$-3=-x-1+x^2-3x-4$$

$$0=x^2-4x-2;\ D=16+8=2\sqrt{6}$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm 2\sqrt{6}}{2}=2\pm\sqrt{6}$$

$$x_1=2+\sqrt{6}\notin(-1,4)\wedge x_2=2-\sqrt{6}\in(-1,4)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{K}_2=\left\{2-\sqrt{6}\right\}$$

III. $x \in (4, \infty)$

$$\frac{3}{x^2-3x-4}=\frac{1}{x-4}+1 \qquad / \cdot (x-4)\cdot(x+1)$$

$$3=x+1+x^2-3x-4$$

$$0=x^2-2x-6$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+24}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{7}}{2}=1\pm\sqrt{7}$$

$$x_1=1+\sqrt{7}\notin(4,\infty)\wedge x_2=1-\sqrt{7}\notin(4,\infty)\Rightarrow \mathrm{K}_3=\varnothing$$

$$\mathrm{K}=\mathrm{K}_1\cup\mathrm{K}_2\cup\mathrm{K}_3=\left\{2-2\sqrt{3}\right\}\cup\left\{2-\sqrt{6}\right\}\cup\varnothing=\left\{2-2\sqrt{3};2-\sqrt{6}\right\}$$

V tomto príklade ešte ukážeme, ako vyzerá skúška, i keď nie je nutná, lebo sme v priebehu riešenia použili len ekvivalentné úpravy.

Skúška: $\text{Ľ}\,(2-2\sqrt{3})=\dfrac{3}{\left|(2-2\sqrt{3})^2-3(2-2\sqrt{3})-4\right|}=\dfrac{3}{\left|4-8\sqrt{3}+12-6+6\sqrt{3}-4\right|}=\dfrac{3}{\left|6-2\sqrt{3}\right|}=$

$$=\frac{3}{6-2\sqrt{3}}=\frac{3}{2(3-\sqrt{3})}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{3(3+\sqrt{3})}{2\cdot 6}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$$

$$\mathrm{P}\,(2-2\sqrt{3})=\frac{1}{\left|2-2\sqrt{3}-4\right|}+1=\frac{1}{2+2\sqrt{3}}+1=\frac{1}{2(1+\sqrt{3})}+1=\frac{1+2+2\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}=\frac{3+2\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{3+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}-6}{2\cdot(-2)}=\frac{-3-\sqrt{3}}{-4}=\frac{3+\sqrt{3}}{4};\ \text{Ľ}\,(2-2\sqrt{3})=\mathrm{P}\,(2-2\sqrt{3})$$

$$\text{Ľ}\,(2-\sqrt{6})=\frac{3}{\left|(2-\sqrt{6})^2-3(2-\sqrt{6})-4\right|}=\frac{3}{\left|4-4\sqrt{6}+6-6+3\sqrt{6}-4\right|}=\frac{3}{\left|-\sqrt{6}\right|}=\frac{3}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\mathrm{P}\,(2-\sqrt{6})=\frac{1}{\left|2-\sqrt{6}-4\right|}+1=\frac{1}{\left|-2-\sqrt{6}\right|}+1=\frac{1}{2+\sqrt{6}}+1=\frac{1+2+\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}}=\frac{3+\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}}\cdot\frac{2-\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{6+2\sqrt{6}-3\sqrt{6}-6}{-2}=\frac{-\sqrt{6}}{-2}=\frac{\sqrt{6}}{2};\ \text{Ľ}\,(2-\sqrt{6})=\mathrm{P}\,(2-\sqrt{6})\Rightarrow \mathrm{K}=\left\{2-2\sqrt{3};2-\sqrt{6}\right\}$$

11. Rovnice s neznámou v odmocnenci

Obsah kapitoly:

- Pojem rovnica s neznámou v odmocnenci
- Riešené príklady

Pojem rovnica s neznámou v odmocnenci

ROVNICE S NEZNÁMOU V ODMOCNENCI (iracionálne rovnice) sú rovnice, ktoré obsahujú výrazy s neznámou v odmocnenci.

Umocňovanie je ekvivalentná úprava len vtedy, keď sú obe strany rovnice nezáporné. To však nemôžeme zaručiť, ak sa v rovnici vyskytuje neznáma.

Riešené príklady

Rovnice s neznámou v odmocnenci riešime umocňovaním, čo však nie je v tomto prípade ekvivalentná úprava, preto je nutnou súčasťou riešenia skúška. Využívame tu tiež všetky poznatky z kapitol č. 9 a 10.

V niektorých prípadoch je vhodné pri riešení použiť substitúciu a určiť podmienky.

Pr. 1

Rieš v R rovnicu: $\sqrt{5-x}=2$

$$\sqrt{5-x}=2 \quad /^2$$
$$5-x=4$$
$$x=1$$

Skúška: $Ľ(1)=\sqrt{5-1}=\sqrt{4}=2$, $P(1)=2$, $Ľ=P \Rightarrow K=\{1\}$

Pr. 2

Rieš v R rovnicu: $\sqrt{5-x}=x+1$

Určíme podmienky: $5-x\geq 0 \wedge x+1\geq 0 \Rightarrow x\in\langle -1;5\rangle$

$$\sqrt{5-x}=x+1 \quad /^2$$
$$5-x=x^2+2x+1$$
$$x^2+3x-4=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=-4$$

Skúška: $Ľ(1)=\sqrt{5-1}=\sqrt{4}=2$, $P(1)=1+1$, $Ľ=P$;

$x_2=-4$ nevyhovuje podmienke $\Rightarrow K=\{1\}$

Pr. 3

Rieš v R rovnicu: $\sqrt{1+x}-\sqrt{4-x}=1$

Nevhodný postup riešenia:

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{4-x}=1 \quad /^2$$
$$1+x-2\sqrt{(1+x)(4-x)}+4-x=1$$
$$-2\sqrt{(1+x)(4-x)}=-4 \quad /:(-2)$$
$$\sqrt{(1+x)(4-x)}=2 \quad /^2$$
$$(1+x)(4-x)=4$$
$$4+3x-x^2=4$$
$$x^2-3x=0$$
$$x(x-3)=0 \Rightarrow x_1=0, x_3=3$$

Vhodnejší postup riešenia:

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{4-x}=1 \quad /+\sqrt{4-x}$$
$$\sqrt{1+x}=1+\sqrt{4-x} \quad /^2$$
$$1+x=1+2\sqrt{4-x}+4-x$$
$$2x-4=2\sqrt{4-x} \quad /:2$$
$$x-2=\sqrt{4-x} \quad /^2$$
$$x^2-4x+4=4-x$$
$$x^2-3x=0$$

Ďalší postup je rovnaký ako v postupe uvedenom vľavo.

Skúška: $Ľ(0)=\sqrt{1+0}-\sqrt{4-0}=\sqrt{1}-\sqrt{4}=1-2=-1$, $P(0)=1$, $Ľ\neq P$

$Ľ(3)=\sqrt{1+3}-\sqrt{4-3}=\sqrt{4}-\sqrt{1}=2-1=1$, $P(3)=1$, $Ľ=P \Rightarrow K=\{3\}$

Pr.4

Rieš v R rovnicu: $x=306+\sqrt{x}$

Substitúcia: $\sqrt{x}=a$

$$x=306+\sqrt{x}$$
$$a^2=306+a$$
$$a^2-a-306=0$$
$$a_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+1\,224}}{2}=\frac{1\pm 35}{2}\Rightarrow a_1=18, a_2=-17$$

Dosadíme naspäť do substitúcie.

$$\sqrt{x_1}\neq -17<0, \sqrt{x_2}=18 \Rightarrow x=324$$

Skúška: $Ľ(324)=324$, $P(324)=306+\sqrt{324}=306+18=324$, $Ľ=P \Rightarrow K=\{324\}$

Pr. 5

Rieš v R rovnicu: $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2x+3}$

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2x+3} \quad /^2$$
$$x+2+2\sqrt{(x+2)(x-2)}+x-2=2x+3$$
$$2\sqrt{x^2-4}=3 \quad /^2$$
$$4(x^2-4)=9$$
$$4x^2=25$$
$$x^2=\frac{25}{4}$$
$$x_{1,2}=\pm\frac{5}{2}$$

Skúška: $Ľ\left(\frac{5}{2}\right)=\sqrt{\frac{5}{2}+2}+\sqrt{\frac{5}{2}-2}=$
$=\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=3\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=4\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2},$
$P\left(\frac{5}{2}\right)=\sqrt{\frac{5}{2}\cdot 2+3}=\sqrt{8}=2\sqrt{2},\ Ľ\left(\frac{5}{2}\right)=P\left(\frac{5}{2}\right)$
$Ľ\left(-\frac{5}{2}\right)=\sqrt{-\frac{5}{2}+2}+\sqrt{-\frac{5}{2}-2}\Rightarrow -\frac{5}{2}\notin K$, a tak
$K=\left\{\frac{5}{2}\right\}$

Pr. 6

Rieš v R rovnicu: $\sqrt{1+x\sqrt{2x^2+8}}=x+1$

$$\sqrt{1+x\sqrt{2x^2+8}}=x+1 \quad /^2$$
$$1+x\sqrt{2x^2+8}=x^2+2x+1$$
$$x\sqrt{2x^2+8}-x(x+2)=0$$
$$x(\sqrt{2x^2+8}-x-2)=0$$

Rovnica je zapísaná v tvare súčinu.

I. $x_1=0$ **II.** $\sqrt{2x^2+8}-x-2=0$
$$\sqrt{2x^2+8}=x+2 \quad /^2$$
$$2x^2+8=x^2+4x+4$$
$$x^2-4x+4=0$$
$$(x-2)^2=0$$
$$x_{2,3}=2$$

Skúška: $Ľ(0)=\sqrt{1+0\sqrt{2\cdot 0+8}}=1,$
$P(0)=0+1=1,\ Ľ=P$
$Ľ(2)=\sqrt{1+2\sqrt{8+8}}=\sqrt{1+8}=3,$
$P(2)=2+1=3,\ Ľ=P\Rightarrow K=\{0;2\}$

Pr. 7

Rieš v R rovnicu: $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6$

$$\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6$$

Substitúcia: $\sqrt[3]{24+x}=a,\ \sqrt{12-x}=b$

$$a+b=6$$
$$24+x=a^3$$
$$12-x=b^2$$

Dostaneme sústavu troch rovníc s tromi premennými a, b, x. Upravíme ju na sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi a, b.

$$a+b=6 \quad\Rightarrow\quad b=6-a$$
$$a^3+b^2=36$$
$$a^3+(6-a)^2=36$$
$$a^3+36-12a+a^2=36$$
$$a^3+a^2-12a=0$$
$$a(a^2+a-12)=0$$

Dosadíme do substitúcie za a_1, a_2, a_3 a dopočítame x_1, x_2, x_3.

I. $a_1=0$

II. $a^2+a-12=0$
$(a+4)(a-3)=0\Rightarrow a_2=-4,\ a_3=3$

$$\sqrt[3]{24+x_1}=0 \quad /^3 \qquad \sqrt[3]{24+x_2}=-4 \quad /^3 \qquad \sqrt[3]{24+x_3}=3 \quad /^3$$
$$24+x_1=0 \qquad 24+x_2=-64 \qquad 24+x_3=27$$
$$x_1=-24 \qquad x_2=-88 \qquad x_3=3$$

Skúška: $Ľ(-24)=\sqrt[3]{24-24}+\sqrt{12-(-24)}=6,\ P(-24)=6,\ Ľ=P$
$Ľ(-88)=\sqrt[3]{24-88}=\sqrt[3]{-64}$ Nemá zmysel.
$Ľ(3)=\sqrt[3]{24+3}+\sqrt{12-3}=3+3=6,\ P(3)=6,\ Ľ=P\Rightarrow K=\{-24;3\}$

12. Lineárne a kvadratické nerovnosti a ich sústavy

Obsah kapitoly:

Pojem nerovnica

Ak sú $f(x)$ a $g(x)$ funkcie premennej x definovanej na množine $D \subset R$, tak pod pojmom NEROVNICA rozumieme niektorý zo vzťahov $f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, $f(x) \leq g(x)$.

RIEŠIŤ NEROVNICU znamená určiť všetky $x \in D$, pre ktoré sa z nerovnice stáva pravdivá nerovnosť.

Analogicky ako pri riešení rovníc používame aj pri riešení nerovníc termíny ľavá a pravá strana nerovnice, obor definície nerovnice, obor pravdivosti K a pod.

Pri riešení nerovníc môžeme použiť tieto EKVIVALENTNÉ ÚPRAVY:

NÁZOV EKVIVALENTNEJ ÚPRAVY	ZÁPIS EKVIVALENTNEJ ÚPRAVY	PRÍKLAD EKVIVALENTNEJ ÚPRAVY NEROVNICE $x^2 < 4$
Výmena strán nerovnice spojená so zmenou znaku nerovnosti.	$f(x) < g(x) \Leftrightarrow g(x) > f(x)$	$4 > x^2$
Pripočítanie funkcie $h(x)$ definovanej na množine D.	$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$	$x^2 + x < 4 + x$
Násobenie kladnou funkciou $h(x)$ definovanou na množine D.	$h(x) > 0$ pre $\forall\ x \in D$: $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x)$	$x^2 \cdot x^4 < 4 \cdot x^4$
Násobenie zápornou funkciou $h(x)$ definovanou na množine D spojené so zmenou znaku nerovnosti.	$h(x) < 0$ pre $\forall\ x \in D$: $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x)$	$x^2 \cdot (-5) > 4 \cdot (-5)$
Umocnenie v prípade nezáporných strán nerovnice.	$0 \leq f(x) < g(x) \Leftrightarrow f^n(x) < g^n(x);\ n \in N$	$(x^2)^2 < 4^2$
Odmocnenie v prípade nezáporných strán nerovnice.	$0 \leq f(x) < g(x) \Leftrightarrow \sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{g(x)};\ n \in N$	$\sqrt{x^2} < \sqrt{4}$

Ak pri riešení nerovnice vykonávame iba ekvivalentné úpravy, nemusíme robiť skúšku. Ak ju urobíme, tak overujeme len správnosť vykonaných úprav. Nerovnice majú často nekonečne veľa koreňov, skúška je zdĺhavá a pomerne obtiažna. Namiesto nej urobíme len približné overenie, t. j. dosadíme len niektoré z čísel patriacich do oboru pravdivosti a niekoľko čísel mimo neho, a tak si overujeme svoje výpočty.

Zápisy ekvivalentných úprav sú analogické aj pre nerovnice so znakmi $>$, $\leq$, $\geq$.

Pri riešení nerovníc často používame aj metódu intervalov. Tento postup je síce rýchlejší ako iné, ale súčasne náročnejší na sledovanie všetkých podmienok.

Pojem lineárna nerovnica

LINEÁRNA NEROVNICA je taká nerovnica, v ktorej sa vyskytuje premenná (napr. x) so stupňom mocniny maximálne jeden, t. j. nerovnica, ktorá sa dá upraviť na jeden z tvarov:
$ax + b < 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b \geq 0$, kde a, b sú ľubovoľné reálne čísla a $x \in R$ je neznáma.

Pr. 1

Rieš v N nerovnicu: $\dfrac{2+27x}{6}<\dfrac{5}{2}+\dfrac{12x+1}{3}$

$$\frac{2+27x}{6}<\frac{5}{2}+\frac{12x+1}{3} \qquad / \cdot 6$$
$$2+27x<15+24x+2$$
$$3x<15 \qquad / :3$$
$$x<5$$
$$\mathrm{K}=\{1;2;3;4\}$$

Násobíme nerovnicu 6, 6 > 0, čiže znak nerovnosti sa nezmení. Delíme nerovnicu 3, 3 > 0, čiže znak nerovnosti sa nezmení. Ak by sme uvažovali o riešení v R, tak by platilo: $\mathrm{K}=(-\infty, 5)$.

Pr. 2

Rieš v N nerovnicu: $3(x+2)+\dfrac{x-2}{2}>0$

$$3(x+2)+\frac{x-2}{2}>0 \qquad / \cdot 2$$
$$6x+12+x-2>0$$
$$7x>-10 \qquad / :7$$
$$x>-\frac{10}{7}$$
$$\mathrm{K}=\mathrm{N}$$

Ak by sme uvažovali o riešení v R, tak by platilo: $\mathrm{K}=\left(-\dfrac{10}{7}, \infty\right)$.

Pr. 3

Rieš v N nerovnicu: $3(x-2)+\dfrac{x-2}{2}>0$

$$3(x-2)+\frac{x-2}{2}>0 \qquad / \cdot 2$$
$$6x-12+x-2>0$$
$$7x>14 \qquad / :7$$
$$x>2$$
$$\mathrm{K}=\mathrm{N}-\{1;2\}$$

Ak by sme uvažovali o riešení v R, tak by platilo: $\mathrm{K}=(2, \infty)$.

Pr. 4

Rieš v R nerovnicu: $\dfrac{x-1}{3-x}\geq 1$

$$\frac{x-1}{3-x}\geq 1 \qquad / \cdot(3-x)$$

I. $3-x>0 \Rightarrow x\in(-\infty, 3)$
$$x-1\geq 3-x$$
$$2x\geq 4 \qquad / :2$$
$$x\geq 2$$
$$\mathrm{K}_1=(-\infty, 3)\cap\langle 2, \infty)=\langle 2, 3)$$

II. $3-x<0 \Rightarrow x\in(3, \infty)$
$$x-1\leq 3-x$$
$$2x\leq 4 \qquad / :2$$
$$x\leq 2$$
$$\mathrm{K}_2=(3, \infty)\cap(-\infty, 2\rangle=\varnothing$$

$$\mathrm{K}=\mathrm{K}_1\cup\mathrm{K}_2=\langle 2, 3)\cup\varnothing=\langle 2, 3)$$

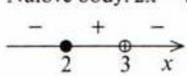
Efektívnejší postup riešenia:

$$\frac{x-1}{3-x}\geq 1 \qquad / -1$$

Nerovnicu anulujeme.

$$\frac{x-1}{3-x}-1\geq 0$$
$$\frac{x-1-3+x}{3-x}\geq 0$$
$$\frac{2x-4}{3-x}\geq 0 \quad ①$$

Nulové body: $2x-4=0 \Leftrightarrow x=2; 3-x=0 \Leftrightarrow x=3$



Dosadíme do ľavej strany nerovnice ① napr. nulu, ktorá sa nachádza v ľavom intervale. Ľavá strana nadobudne zápornú hodnotu. V ďalších intervaloch strieda nerovnica svoje hodnoty vzhľadom na znamienka. Preto je nad číselnou osou −, +, −.

$$\mathrm{K}=\langle 2, 3)$$

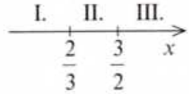
Nerovnice s absolútnou hodnotou

Pri riešení nerovníc s absolútnymi hodnotami postupujeme obdobne ako pri riešení rovníc s absolútnymi hodnotami (pozri kapitoly č. 9 a 10). Rozdiel je len v tom, že nezisťujeme, či koreň patrí do danej časti definičného oboru, ale zisťujeme prienik riešenia a danej časti oboru definície.

Pr. 5

Rieš v R nerovnicu: $|2x-3| \geq |3x-2|$

Nulové body: $2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$, $3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$



I. $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$

$-2x+3 \geq -3x+2$

$x \geq -1$

$K_1 = \langle -1, \infty) \cap \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) = \left\langle -1, \frac{2}{3}\right)$

II. $x \in \left\langle \frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$

$-2x+3 \geq 3x-2$

$5 \geq 5x \qquad / :5$

$x \leq 1$

$K_2 = (-\infty, 1\rangle \cap \left\langle \frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right) = \left\langle \frac{2}{3}, 1\right\rangle$

III. $x \in \left\langle \frac{3}{2}, \infty\right)$

$2x-3 \geq 3x-2$

$-1 \geq x$

$K_3 = (-\infty, 1\rangle \cap \left\langle \frac{3}{2}, \infty\right) = \emptyset$

$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \left\langle -1, \frac{2}{3}\right) \cup \left\langle \frac{2}{3}, 1\right\rangle \cup \emptyset = \langle -1, 1\rangle$

Sústavy lineárnych nerovníc

Sústavu lineárnych nerovníc riešime tak, že každú nerovnicu vyriešime samostatne, čiže určime ich obory pravdivosti, a celkové riešenie, t. j. výsledný obor pravdivosti, dostaneme ako ich prienik.

Pr. 6

Rieš v R sústavu nerovníc:

$$\frac{7-x}{2} - 3 < \frac{3+4x}{5} - 4$$
$$\frac{5}{3}x + 5(4-x) < 2(4-x)$$

$\frac{7-x}{2} - 3 < \frac{3+4x}{5} - 4 \qquad / \cdot 10$

$35 - 5x - 30 < 6 + 8x - 40$

$5 - 5x < 8x - 34$

$39 < 13x \qquad / :13$

$x > 3$

$K_1 = (3, \infty)$

$\frac{5}{3}x + 5(4-x) < 2(4-x) \qquad / \cdot 3$

$5x + 60 - 15x < 24 - 6x$

$-10x + 60 < 24 - 6x$

$36 < 4x \qquad / :4$

$x > 9$

$K_2 = (9, \infty)$

$K = K_1 \cap K_2 = (3, \infty) \cap (9, \infty) = (9, \infty)$

Pojem kvadratická nerovnica

KVADRATICKÁ NEROVNICA je taká nerovnica, v ktorej sa vyskytuje premenná (napr. x) so stupňom mocniny maximálne dva, t. j. nerovnica, ktorá sa dá upraviť na jeden z tvarov: $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\leq 0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, kde a, b, c sú ľubovoľné reálne čísla, $a \neq 0$, $x \in R$ je neznáma.

Niektoré zásady riešenia kvadratických nerovníc:

- riešime ich opäť pomocou nulových bodov, číselnej osi a intervalov, ktoré vzniknú vďaka nulovým bodom,
- nerovnice anulujeme (upravíme tak, aby na jednej strane nerovnice bola nula) a zistíme znamienko nenulovej strany nerovnice v niektorom z intervalov (pomocou zvoleného čísla z tohto intervalu),
- využívame fakt, že znamienko kvadratickej funkcie sa v jednotlivých intervaloch strieda.

Pr. 7

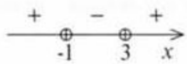
Rieš v R nerovnicu: $x^2 - 2x - 3 > 0$

$(x-3)(x+1) > 0$

Nulové body: $x_1 = 3, x_2 = -1$

$Ľ(2) < 0$

$K = (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$



Upravíme nerovnicu, aby sme ľahšie našli nulové body, určíme ich a znázorníme na číselnej osi. Zvolíme číslo z ľubovoľného intervalu (nie hranicu) a určíme hodnotu ľavej strany nerovnice v tomto bode. Určíme znamienka ostatných intervalov - vieme, že sa v intervaloch striedajú.

Pr. 8

Rieš v R nerovnicu: $x^2 - 2x + 1 \le 0$

$(x-1)^2 \le 0$

$K = \{1\}$

Výraz $(x-1)^2$ je pre $\forall\, x \in R$ nezáporný.

Pr. 9

Rieš v R nerovnicu: $x^2 - 3x - 5 \ge 0$

$x^2 - 3x - 5 \ge 0$

$x^2 - 3x - 5 = 0$

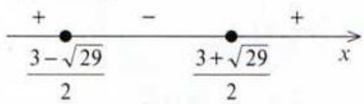
Nulové body: $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+20}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$

$Ľ(0) < 0$

$$K = \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{29}}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3+\sqrt{29}}{2}, \infty\right)$$

Ľavá strana sa nedá v Z rozložiť

Vyriešime najprv rovnicu.



Pr. 10

Rieš v R nerovnicu: $\dfrac{|x+2|}{|x+6|} \ge \dfrac{|x-1|}{|x-4|}$

Podmienky: $x \ne -6 \wedge x \ne 4$

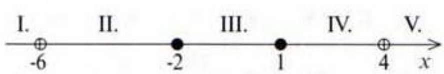
$$\frac{|x+2|}{|x+6|} \ge \frac{|x-1|}{|x-4|} \qquad / \cdot |x+6| \cdot |x-4|$$

$|x+2| \cdot |x-4| \ge |x-1| \cdot |x+6|$

$|(x+2)(x-4)| \ge |(x-1)(x+6)|$

Nulové body: $x_1 = -2, x_2 = 4, x_3 = 1, x_4 = -6$

Tento výraz je kladný ($\forall\, x \in R - \{-6; 4\}$) a znak nerovnosti sa teda nezmení.



I. $x \in (-\infty, -6) \Rightarrow |(x+2)(x-4)| = (x+2)(x-4) \wedge |(x-1)(x+6)| = (x-1)(x+6)$

$x^2 - 2x - 8 \ge x^2 + 5x - 6$

$-2 \ge 7x \qquad / : 7$

$x \le -\dfrac{2}{7}$

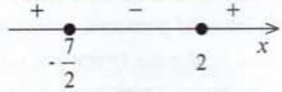
$$K_1 = (-\infty, -6) \cap \left(-\infty, -\frac{2}{7}\right\rangle = (-\infty, -6)$$

II. $x \in (-6, -2\rangle \Rightarrow |(x+2)(x-4)| = (x+2)(x-4) \wedge |(x-1)(x+6)| = -(x-1)(x+6)$

$x^2 - 2x - 8 \ge -x^2 - 5x + 6$

$2x^2 + 3x - 14 \ge 0$

Nulové body: $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+112}}{4}=\dfrac{-3\pm 11}{4}\Rightarrow x_1=2,\ x_2=-\dfrac{7}{2}$



$$x\in\left(-\infty,-\frac{7}{2}\right\rangle\cup\langle 2,\infty)$$

$$\mathsf{K}_2=\left[\left(-\infty,-\frac{7}{2}\right\rangle\cup\langle 2,\infty)\right]\cap(-6,-2\rangle=\left(-6,-\frac{7}{2}\right\rangle$$

III. $x\in(-2,1\rangle\ \Rightarrow\ |(x+2)(x-4)|=-(x+2)(x-4)\wedge|(x-1)(x+6)|=-(x-1)(x+6)$

$$-x^2+2x+8\geq -x^2-5x+6$$

$$7x\geq -2 \qquad /:7$$

$$x\geq -\frac{7}{2}$$

$$\mathsf{K}_3=(-2,1\rangle\cap\left\langle -\frac{2}{7},\infty\right)=\left\langle -\frac{2}{7},1\right\rangle$$

IV. $x\in(1,4)\ \Rightarrow\ |(x+2)(x-4)|=-(x+2)(x-4)\wedge|(x-1)(x+6)|=(x-1)(x+6)$

$$-x^2+2x+8\geq x^2+5x-6$$

$$-2x^2-3x+14\geq 0 \qquad /\cdot(-1)$$

$$2x^2+3x-14\leq 0$$

Nulové body: $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+112}}{4}=\dfrac{-3\pm 11}{4}\Rightarrow x_1=2,\ x_2-\dfrac{7}{2}$

$$x\in\left\langle -\frac{7}{2},2\right\rangle$$

$$\mathsf{K}_4=\left\langle -\frac{7}{2},2\right\rangle\cap(1,2)=(1,2\rangle$$

V. $x\in(4,\infty)\ \Rightarrow\ |(x+2)(x-4)|=(x+2)(x-4)\wedge|(x-1)(x+6)|=(x-1)(x+6)$

$$x^2-2x-8\geq x^2+5x-6$$

$$-7x\geq 2 \qquad /:(-7)$$

$$x\leq -\frac{2}{7}$$

$$\mathsf{K}_5=\left(-\infty,-\frac{2}{7}\right\rangle\cap(4,\infty)=\emptyset$$

$$\mathsf{K}=\mathsf{K}_1\cup\mathsf{K}_2\cup\mathsf{K}_3\cup\mathsf{K}_4\cup\mathsf{K}_5=(-\infty,-6)\cup\left(-6,-\frac{7}{2}\right\rangle\cup\left\langle -\frac{2}{7},1\right\rangle\cup(1,2\rangle\cup\emptyset=$$

$$=(-\infty,-6)\cup\left(-6,-\frac{7}{2}\right\rangle\cup\left\langle -\frac{2}{7},2\right\rangle$$

Pojem nerovnica s neznámou v odmocnenci

NEROVNICE S NEZNÁMOU V ODMOCNENCI (iracionálne nerovnice) sú také nerovnice, v ktorých sa vyskytujú výrazy s neznámou v odmocnenci.

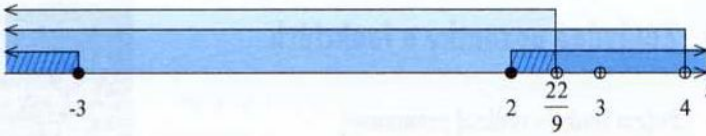
Pr. 11 Rieš v R nerovnicu: $\sqrt{x^2+x-6}<4-x$

Podmienky: $x^2+x-6\geq 0 \quad\wedge\quad 4-x>0$

$(x+3)(x-2)\geq 0 \qquad x<4$

$x\in(-\infty,-3\rangle\cup\langle 2,\infty) \qquad x\in(-\infty,4)$

$$\sqrt{x^2+x-6}<4-x \qquad /^2$$
$$x^2+x-6<16-8x+x^2$$
$$9x<22$$
$$x<\frac{22}{9}$$



$$\mathsf{K}=(-\infty,-3\rangle\cup\left\langle 2,\frac{22}{9}\right)$$

Výsledok porovnáme s podmienkami (pomocou znázornenia na číselnej osi) a určíme riešenie nerovnice.

Nerovnice s dvoma neznámymi a ich sústavy

Najefektívnejšia metóda riešenia nerovnice s dvoma neznámymi je grafická. Nerovnicu najprv prepíšeme na rovnicu. Táto rovnica je vlastne rovnicou priamky, ktorú načrtneme v sústave súradníc. Riešením nerovnice je jedna z polrovín určených touto priamkou. Polrovinu určíme pomocou jedného bodu roviny. Súradnice tohto bodu dosadíme do pôvodnej nerovnice a podľa toho, či dostaneme pravdivý alebo nepravdivý výrok o nerovnosti čísel, určíme, ktorá z polrovín je grafickým riešením danej nerovnice.

Pr. 12

Rieš v R^2 nerovnicu: $x+y-1>0$

$x+y-1=0$

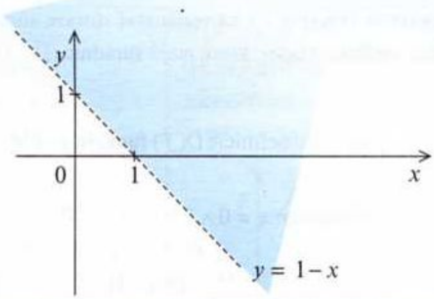
$y=1-x$

$[0;0]$:

$0+0-1<0\Rightarrow$

$\Rightarrow[0;0]\notin\mathsf{K}$

Nerovnicu prepíšeme na rovnicu a z nej určíme priamku ohraničujúcu polrovinu. Zistíme, či bod $[0;0]$ je riešením. Riešením nie je polrovina obsahujúca bod $[0;0]$.



Riešením sú všetky body vyfarbenej polroviny okrem hraničnej priamky $y=1-x$.

Sústavu nerovníc s dvoma neznámymi riešime tak, že vyriešime každú z nerovníc samostatne a celkové riešenie získame ako prienik jednotlivých riešení.

Pr. 13

Rieš v R^2 sústavu nerovníc:
$$\begin{aligned}x+y-1&>0\\2x-y-2&\le 0\end{aligned}$$

$x+y-1=0$

$y=1-x$

$[0;0]$:

$0+0-1<0\Rightarrow[0;0]\notin\mathsf{K}_1$

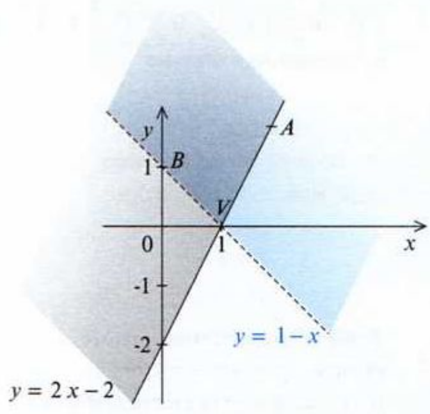
$2x-y-2=0$

$y=2x-2$

$[0;0]$:

$2\cdot 0-0-2<0\Rightarrow[0;0]\in\mathsf{K}_2$

$\mathsf{K}=\mathsf{K}_1\cap\mathsf{K}_2$



Riešením sú všetky body uhla $\sphericalangle AVB$ okrem jeho ramena $\mapsto VB$.

13. Základné poznatky o funkciách

Obsah kapitoly:

Pojem funkcia reálnej premennej

Nech sú dané dve neprázdne množiny reálnych čísel A a B. Ak priradíme každému číslu $x \in A$ podľa istého predpisu najviac jedno číslo $y \in B$ (ktoré označíme $y = f(x)$ a nazveme FUNKČNÁ HODNOTA), tak množina f všetkých usporiadaných dvojíc $[x; f(x)]$ sa nazýva REÁLNA FUNKCIA REÁLNEJ PREMENNEJ. Zapisujeme f: $y = f(x)$.

Množinu A všetkých hodnôt premennej x označujeme $D(f)$ a nazývame DEFINIČNÝ OBOR FUNKCIE (obor definície funkcie) f. Premennú $x \in D(f)$ nazývame NEZÁVISLE PREMENNÁ.

Množinu tých prvkov $y \in B$, ku ktorým existuje aspoň jeden taký prvok $x \in A$, že $[x, y] \in f$, nazývame OBOROM HODNÔT FUNKCIE f a označujeme $H(f)$.

GRAFOM FUNKCIE f v karteziánskej sústave súradníc je množina všetkých bodov, ktoré majú súradnice $[x; f(x)]$.

Funkcia je jednoznačne určená, ak je určený jej $D(f)$ a funkčný predpis $y = f(x)$. Tento môže byť zadaný:

- rovnicou (zadanie presné, málo názorné),
- grafom (zadanie často nepresné, názorné),
- *tabuľkou (zadanie používané pri funkcii* s konečným $D(f)$,
- slovami (slovným predpisom - zadanie používané pri funkciách, ktoré sa nedajú určiť rovnicou).

Určovanie $H(f)$ z predpisu funkcie f je obvykle dosť obtiažne (pozri ďalej pri inverznej funkcii).

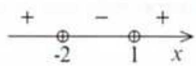
Pr. 1

Urči obor definície $D(f)$ funkcie f: $y = \dfrac{3x-1}{x\sqrt{2-x-x^2}}$.

Podmienky: $x \neq 0 \wedge 2-x-x^2 > 0$

$$x^2 + x - 2 < 0$$

$$(x+2)(x-1) < 0 \Rightarrow x \in (-2, 1)$$



V menovateli nesmie byť nula. Výraz pod odmocninou musí byť navyše nezáporný.

$D(f) = (-2, 0) \cup (0, 1)$

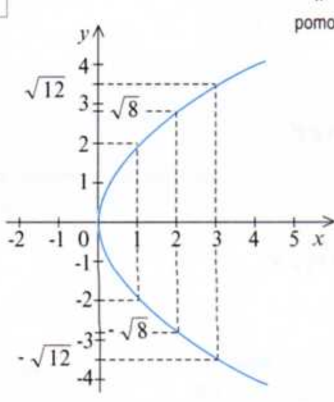
Pr. 2

Urči, či predpis $y^2 = 4x$ je predpisom funkcie.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	n. d.	n. d.	0	± 2	$\pm\sqrt{8}$	$\pm\sqrt{12}$

n. d. znamená „nie je definovaná"

Zostrojíme graf závislosti. Najprv zostavíme tabuľku, pomocou ktorej graf načrtneme.



Závislosť nie je funkcia, pretože existuje aspoň jedno x, ktorému je priradená viac než jedna hodnota y.

Rovnosť funkcií, operácie s funkciami

Dané sú dve funkcie f a g s obormi definície $D(f)$ a $D(g)$ a množina $A \subseteq D(f) \cap D(g)$, $A \neq \emptyset$. Na množine A potom definujeme:

- ROVNOSŤ FUNKCIÍ f, g tak, že $f = g \Leftrightarrow \forall x \in A$: $f(x) = g(x)$,
- SÚČET FUNKCIÍ f, g tak, že $s = f + g \Leftrightarrow \forall x \in A$: $s(x) = f(x) + g(x)$,
- ROZDIEL FUNKCIÍ f, g tak, že $r = f - g \Leftrightarrow \forall x \in A$: $r(x) = f(x) - g(x)$,
- SÚČIN FUNKCIÍ f, g tak, že $n = f \cdot g \Leftrightarrow \forall x \in A$: $n(x) = f(x) \cdot g(x)$,
- PODIEL FUNKCIÍ f, g tak, že $p = \dfrac{f}{g} \Leftrightarrow \forall x \in A$, $g(x) \neq 0$: $p(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

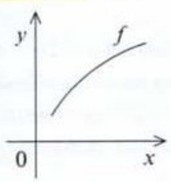
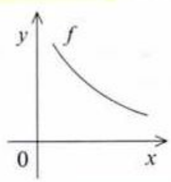
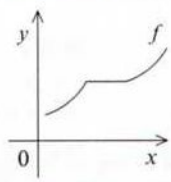
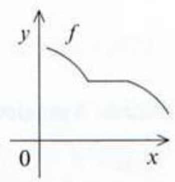
Zložená funkcia

Funkcia h je zložená, ak ju môžeme zapísať v tvare $h(x) = f(g(x))$ pre $\forall x \in D(h)$. Funkciu $g(x) = u$ nazývame VNÚTORNÁ ZLOŽKA, funkciu $f(u)$ VONKAJŠIA ZLOŽKA zloženej funkcie u.

Zložená funkcia $F: y = \sqrt[3]{x^3 - 1}$ má vnútornú zložku $u = x^3 - 1$ a vonkajšiu zložku $f(u) = \sqrt[3]{u}$.

Monotónnosť funkcie, prostá funkcia

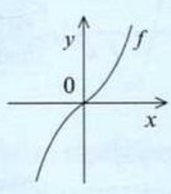
Daná je funkcia f definovaná na množine $A \subseteq D(f)$. Ak pre $\forall x_1, x_2 \in A$, kde $x_1 < x_2$, platí:

$f(x_1) < f(x_2)$, tak sa f nazýva RASTÚCA FUNKCIA NA A	$f(x_1) > f(x_2)$, tak sa f nazýva KLESAJÚCA FUNKCIA NA A	$f(x_1) \leq f(x_2)$, tak sa f nazýva NEKLESAJÚCA FUNKCIA NA A	$f(x_1) \geq f(x_2)$, tak sa f nazýva NERASTÚCA FUNKCIA NA A
			

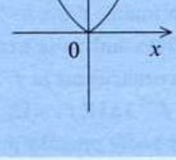
Funkcie rastúce a klesajúce sa nazývajú RÝDZO MONOTÓNNE.
Funkcie nerastúce a neklesajúce sa nazývajú MONOTÓNNE.

Rastúcou funkciou je napr. $y = 3x$, klesajúcou funkciou je napr. $y = -5x + 1$.

Nech je funkcia f definovaná na množine $A \subseteq D(f)$. Funkcia f sa nazýva PROSTÁ na množine A práve vtedy, keď pre $\forall x_1, x_2 \in A$, kde $x_1 \neq x_2$, sa $f(x_1) \neq f(x_2)$.

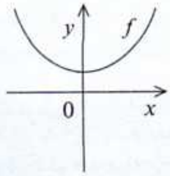
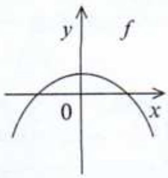
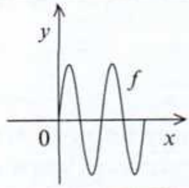


Príkladom funkcie, ktorá je prostá, je rastúca alebo klesajúca funkcia. Príklad funkcie, ktorá nie je prostá:

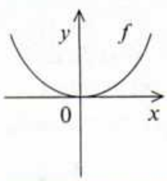
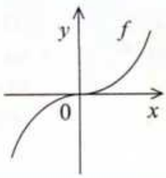


Ohraničenosť funkcie, párna a nepárna funkcia

Ak je funkcia f definovaná na množine $A \subseteq D(f)$, tak je:

NA A ZDOLA OHRANIČENÁ	NA A ZHORA OHRANIČENÁ	NA A OHRANIČENÁ
NA A ZDOLA OHRANIČENÁ práve vtedy, keď existuje také číslo $d \in R$, že pre $\forall x \in A$ je $f(x) \geq d$	**NA A ZHORA OHRANIČENÁ** práve vtedy, keď existuje také číslo $h \in R$, že pre $\forall x \in A$ je $f(x) \leq h$	**NA A OHRANIČENÁ** práve vtedy, keď je ohraničená zhora i zdola
		

Funkcia $y = -8x^2 - 2$ je zhora ohraničená, zdola ohraničená nie je.

PÁRNA	NEPÁRNA
Hovoríme, že funkcia f je **PÁRNA** práve vtedy, keď ku každému $x \in D(f)$ existuje $-x \in D(f)$ tak, že $f(-x) = f(x)$.	Hovoríme, že funkcia f je **NEPÁRNA** práve vtedy, keď ku každému $x \in D(f)$ existuje $-x \in D(f)$ tak, že $f(-x) = -f(x)$.
	

Graf párnej funkcie je súmerný podľa súradnicovej osi y. Graf nepárnej funkcie je súmerný podľa začiatku súradnicovej sústavy.

Párnou funkciou je napr. $y = -7x^2 + 21$, nepárnou je napr. $y = x^3$.

Minimá a maximá funkcie

Ak je f funkcia, $A \subseteq D(f)$, $a \in A$, $b \in A$, tak má funkcia f na A:

- v bode a **MINIMUM** práve vtedy, keď pre $\forall x \in A$ je $f(x) \geq f(a)$,
- v bode b **MAXIMUM** práve vtedy, keď pre $\forall x \in A$ je $f(x) \leq f(b)$.

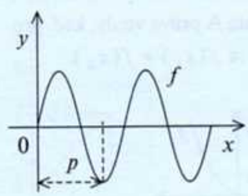
Funkcia $y = 2x^2$ má minimum v bode $x = 0$, maximum táto funkcia nemá.

Minimá a maximá funkcie súhrnne nazývame **EXTRÉMY** funkcie.

Periodická funkcia, inverzná funkcia

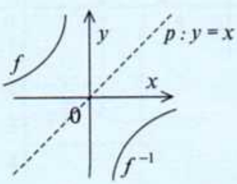
Funkcia f sa nazýva **PERIODICKÁ FUNKCIA**, ak existuje také $p > 0$, že pre $\forall k \in Z$ platí:

1. ak je funkcia definovaná pre číslo x, tak je definovaná aj pre čísla $x + kp$,
2. pre $\forall x \in D(f)$ platí $f(x) = f(x + kp)$.



Periodickými funkciami sú napr. všetky goniometrické funkcie.

Ak je funkcia f prostá na celom $D(f)$ a $H(f)$ je jej obor hodnôt, tak sa dá na $H(f)$ definovať funkcia, ktorá každému $y \in H(f)$ priraďuje práve to číslo $x \in D(f)$, pre ktoré sa $f(x) = y$. Táto funkcia sa nazýva **INVERZNÁ FUNKCIA** k funkci f a označujeme ju f^{-1}. Pre tieto funkcie platí $D(f) = H(f^{-1})$ a $H(f) = D(f^{-1})$. Grafy týchto funkcií sú súmerné podľa priamky p: $y = x$.



Navzájom inverznými funkciami sú napr. $y = e^x$ a $y = \ln x$.

14. Lineárna funkcia

Obsah kapitoly:

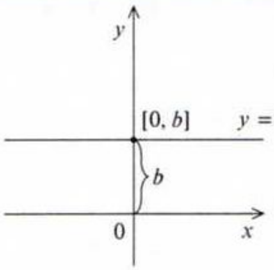
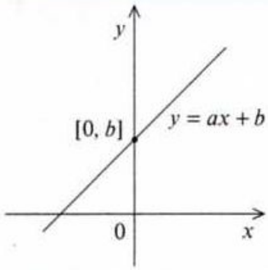
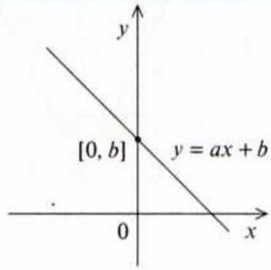
Pojem lineárna funkcia a jej graf

LINEÁRNA FUNKCIA je každá funkcia, ktorá je daná predpisom $f\colon y = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Grafom lineárnej funkcie je PRIAMKA.

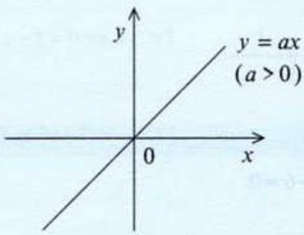
Pretože grafom lineárnej funkcie je priamka, pri určovaní grafu alebo predpisu lineárnej funkcie stačí poznať dve usporiadané dvojice patriace funkcii: $[x_1, y_1] \in f$ a $[x_2, y_2] \in f$.

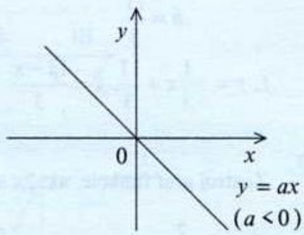
Druhy lineárnych funkcií

Rozdelenie lineárnych funkcií podľa hodnoty koeficientu a:

$a = 0$	$a > 0$	$a < 0$
		
$f\colon y = b$ $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \{b\}$ Grafom je priamka rovnobežná s osou x a prechádzajúca bodom $[0; b]$. Nie je rastúca ani klesajúca. Je ohraničená. Táto funkcia nie je lineárnou funkciou a nazýva sa KONŠTANTNÁ FUNKCIA.	$f\colon y = ax + b$ $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \mathbb{R}$ Grafom je priamka prechádzajúca bodom $[0; b]$. Je rastúca na celom $D(f)$, teda je aj prostá. Nie je ani zhora, ani zdola ohraničená. Nemá maximum ani minimum.	$f\colon y = ax + b$ $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \mathbb{R}$ Grafom je priamka prechádzajúca bodom $[0; b]$. Je klesajúca na celom $D(f)$, teda je aj prostá. Nie je ani zhora, ani zdola ohraničená. Nemá maximum ani minimum.

Ak sa $b = 0$, ide o funkciu $f\colon y = ax$. Táto funkcia sa nazýva PRIAMA ÚMERNOSŤ. Grafom priamej úmernosti je priamka prechádzajúca bodom $0[0; 0]$, čiže začiatkom sústavy súradníc.





Lineárna funkcia s absolútnou hodnotou

LINEÁRNA FUNKCIA S ABSOLÚTNOU HODNOTOU je taká lineárna funkcia, ktorá obsahuje vo svojom predpise jednu alebo viac absolútnych hodnôt, v ktorých sú výrazy s premennou.

Riešené príklady

Pri hľadaní grafu lineárnej funkcie využívame skutočnosť, že na zostrojenie priamky nám stačí poznať jej dva body. Ak zisťujeme vlastnosti lineárnej funkcie, tak obvykle vychádzame z grafu tejto funkcie.

Pr. 1

Načrtni grafy funkcií:

$f_1: y = 3,\ f_2: y = 2x,\ f_3: y = 2x - 2,\ f_4: y = -3x + 1.$

f_1:

x	0	1
y	3	3

f_2:

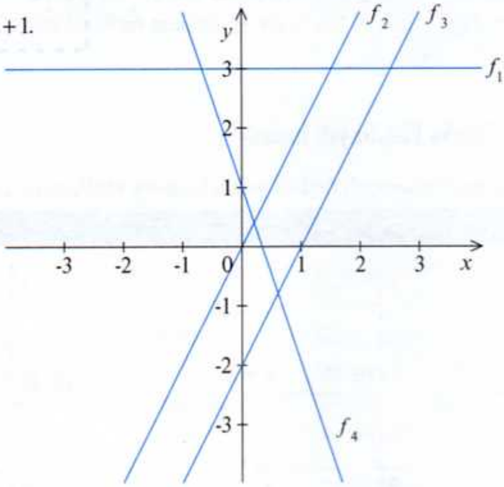
x	0	1
y	0	2

f_3:

x	0	1
y	−2	0

f_4:

x	0	1
y	1	−2



Pr. 2

Napíš predpis lineárnej funkcie, ak vieš, že jej graf prechádza bodmi $A[2; 3]$, $B[-1; 4]$.

$$y = ax + b$$

Napíšeme všeobecný predpis funkcie f.

$$A \in f:\quad 3 = 2a + b \quad ①$$
$$B \in f:\quad 4 = -a + b \quad / \cdot (-1)\quad +$$
$$-1 = 3a \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{3}$$
$$3 = 2\left(-\frac{1}{3}\right) + b$$
$$b = \frac{11}{3}$$
$$f: y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3},\ y = \frac{11 - x}{3}$$

Body „ležia na funkcii", preto musia spĺňať jej predpis. Dosadíme súradnice bodov do predpisu a dostaneme sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi a, b. Dosadíme za a do rovnice ① a dopočítame b.

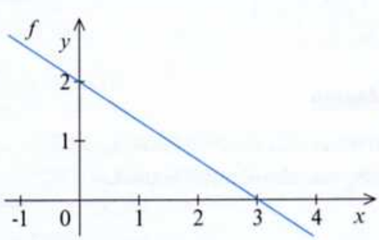
Predpis lineárnej funkcie a smernicový tvar priamky majú rovnaký zápis.

Pr. 3

Zostroj graf funkcie, ak: $2x + 3y - 6 = 0$.

$$f: y = -\frac{2}{3}x + 2$$

x	3	0
y	0	2



Rovnicu upravíme na tvar $f: y = ax + b$, hoci aj bez tejto úpravy vidno, že ide o lineárnu funkciu.
Grafom je priamka prechádzajúca dvoma bodmi, ktoré na nej ležia.

Pr. 4

Zostroj grafy funkcií a urči ich vlastnosti:

a) $f\colon y = |x|$ **b)** $g\colon y = 2|x| - 1$ **c)** $h\colon y = |x - 2|$

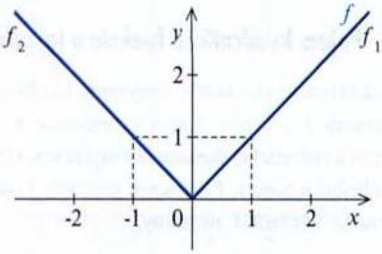
a) Nulový bod: $x = 0$

I. $x \in \langle 0, \infty) \Rightarrow |x| = x$ **II.** $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow |x| = -x$

$f_1\colon y = x$ $f_2\colon y = -x$

$f = f_1 \cup f_2$

Je to funkcia zdola ohraničená, párna, $D(f) = R$, $H(f) = \langle 0, \infty)$. Funkcia má minimum v bode $x = 0$, maximum funkcia nemá. Je klesajúca na $(-\infty, 0\rangle$ a rastúca na $\langle 0, \infty)$.



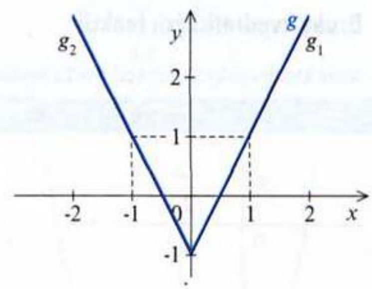
b) Nulový bod: $x = 0$

I. $x \in \langle 0, \infty) \Rightarrow |x| = x$ **II.** $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow |x| = -x$

$g_1\colon y = 2x - 1$ $g_2\colon y = -2x - 1$

$g = g_1 \cup g_2$

Je to funkcia zdola ohraničená, párna, $D(g) = R$, $H(g) = \langle -1, \infty)$. Funkcia má minimum v bode $x = 0$, maximum funkcia nemá. Je klesajúca na $(-\infty, 0\rangle$ a rastúca na $\langle 0, \infty)$.



c) Nulový bod: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

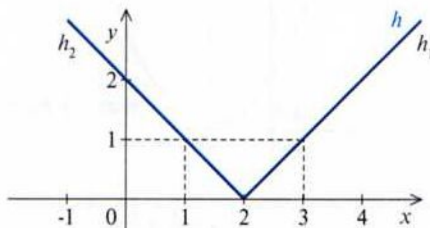
I. $x \in \langle 2, \infty) \Rightarrow$ **II.** $x \in (-\infty, 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow |x - 2| = x - 2$ $\Rightarrow |x - 2| = -x + 2$

$h_1\colon y = x - 2$ $h_2\colon y = -x + 2$

$h = h_1 \cup h_2$

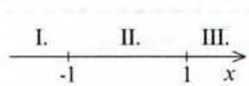
Je to funkcia zdola ohraničená, nie je párna ani nepárna, $D(h) = R$, $H(h) = \langle 0, \infty)$. Funkcia má minimum v bode $x = 2$, maximum funkcia nemá. Je klesajúca na $(-\infty, 2\rangle$ a rastúca na $\langle 2, \infty)$.



Pr. 5

Zostroj graf funkcie $f\colon y = |x + 1| - |x - 1|$.

Nulové body: $x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$, $x - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$



I. $x \in (-\infty, -1)$

$x + 1 < 0 \Rightarrow |x + 1| = -x - 1$, $x - 1 < 0 \Rightarrow |x - 1| = -x + 1$

$f_1\colon y = (-x - 1) - (-x + 1) = -2$

II. $x \in \langle -1, 1)$

$x + 1 \geq 0 \Rightarrow |x + 1| = x + 1$, $x - 1 < 0 \Rightarrow |x - 1| = -x + 1$

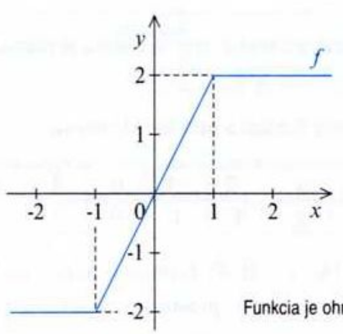
$f_2\colon y = (x + 1) - (-x + 1) = -2x$

III. $x \in \langle 1, \infty)$

$x + 1 > 0 \Rightarrow |x + 1| = x + 1$, $x - 1 \geq 0 \Rightarrow |x - 1| = x - 1$

$f_3\colon y = (x + 1) - (x - 1) = 2$

$f = f_1 \cup f_2 \cup f_3$



Funkcia je ohraničená, nepárna.

$f(-2) = -2$; $f(-1) = -2$; $f(1) = 2$; $f(2) = 2$

15. Kvadratická funkcia

Obsah kapitoly:

- ❑ Pojem kvadratická funkcia a jej graf
- ❑ Druhy kvadratických funkcií
- ❑ Kvadratická funkcia s absolútnou hodnotou

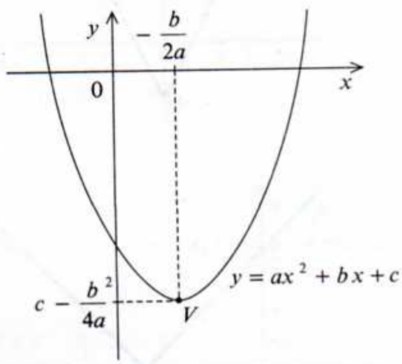
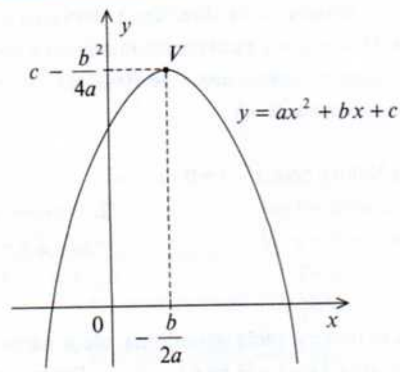
Pojem kvadratická funkcia a jej graf

KVADRATICKOU FUNKCIOU nazývame každú funkciu danú predpisom $f\colon y = ax^2 + bx + c$, pričom $a, b, c \in \mathrm{R}$ a $a \neq 0$. Grafom kvadratickej funkcie je PARABOLA. Os paraboly je rovnobežná s osou y. Priesečník paraboly s osou paraboly nazývame VRCHOL V paraboly.

V predpise kvadratickej funkcie musí byť $a \neq 0$, inak by sa predpis zmenil na $f\colon y = 0 \cdot x^2 + bx + c = bx + c$, čo je predpis lineárnej funkcie.

Druhy kvadratických funkcií

Rozdelenie kvadratických funkcií podľa hodnoty koeficientu a:

$a > 0$	$a < 0$
	
$\mathrm{D}(f) = \mathrm{R}$, $\mathrm{H}(f) = \left\langle c - \frac{b^2}{4a}, \infty \right)$ Funkcia je zdola ohraničená, zhora ohraničená nie je. Je rastúca na $\left\langle -\frac{b}{2a}, \infty \right)$, klesajúca na $\left(-\infty, -\frac{b}{2a} \right\rangle$. V bode $x = -\frac{b}{2a}$ má funkcia minimum, maximum funkcia nemá.	$\mathrm{D}(f) = \mathrm{R}$, $\mathrm{H}(f) = \left(-\infty, c - \frac{b^2}{4a} \right\rangle$ Funkcia je zhora ohraničená, zdola ohraničená nie je. Je rastúca na $\left(-\infty, -\frac{b}{2a} \right\rangle$, klesajúca na $\left\langle -\frac{b}{2a}, \infty \right)$. V bode $x = -\frac{b}{2a}$ má funkcia maximum, minimum funkcia nemá.

Ak sa $b = 0$, funkcia má tvar $f\colon ax^2 + c = 0$ a je párna, čiže jej graf je súmerný podľa osi y.

Pr. 1 Načrtni grafy funkcií a urči ich vlastnosti: **a)** $f\colon y = x^2$ **b)** $g\colon y = -x^2$

a) $a = 1$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

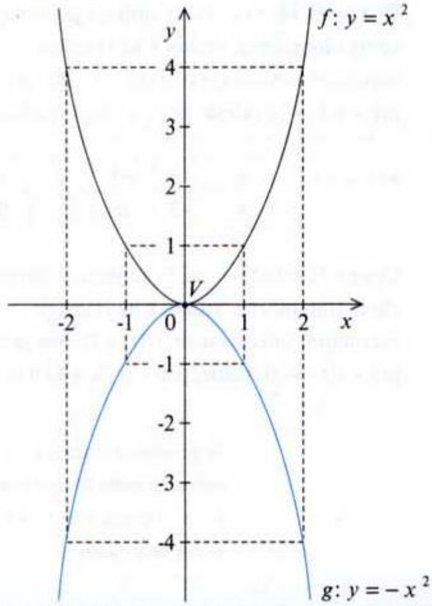
Zostavíme tabuľku funkčných hodnôt danej funkcie a pomocou nej načrtneme graf.

$\mathrm{D}(f) = \mathrm{R}$, $\mathrm{H}(f) = \langle 0, \infty)$, funkcia je párna, zdola ohraničená, vrchol $V[0, 0]$ určuje minimum funkcie (je to $f(0) = 0$). Nie je prostá, pre $x \in (-\infty, 0\rangle$ klesá, pre $x \in \langle 0, \infty)$ rastie.

b) $a = -1$

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	-1	-4

$\mathrm{D}(g) = \mathrm{R}$, $\mathrm{H}(g) = (-\infty, 0\rangle$, funkcia je párna, zhora ohraničená, vrchol $V\,[0, 0]$ určuje maximum funkcie (je to $f(0) = 0$). Nie je prostá, pre $x \in (-\infty, 0\rangle$ rastie, pre $x \in \langle 0, \infty)$ klesá.



Z grafov vidíme, že graf funkcie f je súmerný s grafom funkcie g podľa osi x.

Pr. 2

Načrtni grafy funkcií a urči ich vlastnosti: **a)** f: $y = 2x^2$ **b)** g: $y = -2x^2$

a) $a = 2$

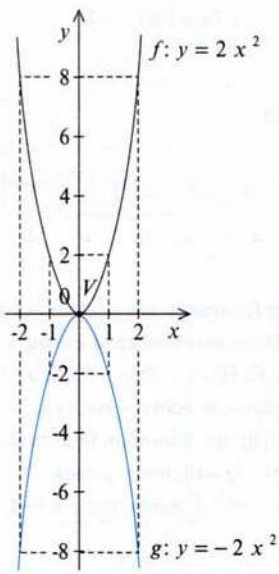
x	-2	-1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

$\mathrm{D}(f) = \mathrm{R}$, $\mathrm{H}(f) = \langle 0, \infty)$, funkcia je párna, zdola ohraničená, vrchol $V\,[0, 0]$ určuje minimum funkcie (je to $f(0) = 0$). Nie je prostá, pre $x \in (-\infty, 0\rangle$ klesá, pre $x \in \langle 0, \infty)$ rastie.

b) $a = -2$

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-2	0	-2	-8

$\mathrm{D}(g) = \mathrm{R}$, $\mathrm{H}(g) = (-\infty, 0\rangle$, funkcia je párna, zhora ohraničená, vrchol $V\,[0, 0]$ určuje maximum funkcie (je to $f(0) = 0$). Nie je prostá, pre $x \in (-\infty, 0\rangle$ rastie, pre $x \in \langle 0, \infty)$ klesá.



Ak porovnáme vlastnosti funkcií z predchádzajúcich dvoch príkladov, zistíme, že vlastnosti jednotlivých funkcií f sú rovnaké, rovnako ako vlastnosti funkcií g. Funkcie sa líšia len funkčnými hodnotami pre jednotlivé $x \in \mathrm{D}(f)$.

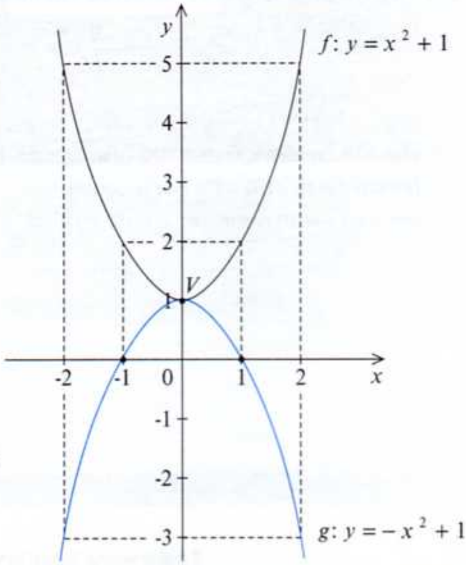
Pr. 3

Načrtni grafy funkcií a urči ich vlastnosti: **a)** f: $y = x^2 + 1$ **b)** g: $y = -x^2 + 1$

a) $a = 1$

x	-2	-1	0	1	2
y	5	2	1	2	5

$D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle 1, \infty)$, funkcia je párna, zdola ohraničená, vrchol $V[0, 1]$ určuje minimum funkcie (je to $f(0) = 1$). Nie je prostá, pre $x \in (-\infty, 0\rangle$ klesá, pre $x \in \langle 0, \infty)$ rastie.



b) $a = -1$

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	0	1	0	-3

$D(g) = \mathbb{R}$, $H(g) = (-\infty, 1\rangle$, funkcia je párna, zhora ohraničená, vrchol $V[0, 1]$ určuje maximum funkcie (je to $f(0) = 1$). Nie je prostá, pre $x \in (-\infty, 0\rangle$ rastie, pre $x \in \langle 0, \infty)$ klesá.

Pri porovnaní s funkciou $y = x^2$, resp. $y = -x^2$, vidíme, že všetky funkčné hodnoty funkcie $y = x^2 + 1$, resp. $y = -x^2 + 1$ sú zväčšené o číslo 1.

Pozrime sa teraz, ako sa určujú súradnice vrcholu V paraboly a priebeh funkcie, ktorá je určená úplne všeobecne.

Pr. 4

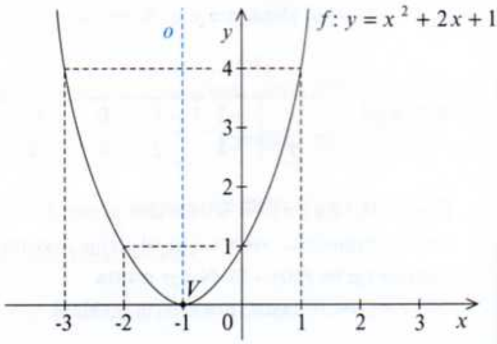
Načrtni graf funkcie $f\colon y = x^2 + 2x + 1$ a urči jej vlastnosti.

$f\colon y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$
$(x+1)^2 \geq 0$
$(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
$V[-1, 0]$

Upravíme predpis funkcie „doplnením na štvorec". Určíme minimum funkcie. Funkcia má minimum pre $x = -1$, a to $y = 0$, sú to vlastne súradnice vrcholu paraboly. Hodnoty x v tabuľke volíme symetricky vzhľadom na číslo $x = -1$.

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4	9

Grafom funkcie $f\colon y = x^2 + 2x + 1$ je parabola, os paraboly je rovnobežná s osou y, $o \parallel y$. $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle 0, \infty)$, funkcia nie je párna ani nepárna, je zdola ohraničená, vrchol $V[-1, 0]$ určuje minimum tejto funkcie (je to $f(-1) = 0$), nie je prostá, pre $x \in (-\infty, -1\rangle$ klesá, pre $x \in \langle -1, \infty)$ rastie.



Pr. 5

Načrtni graf funkcie $f\colon y = x^2 - 4x - 5$ a urči jej vlastnosti.

$f\colon y = x^2 - 4x - 5 = (x-2)^2 - 4 - 5 = (x-2)^2 - 9$
$(x-2)^2 \geq 0$
$(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
$V[2, -9]$
$y = 0$: $\quad 0 = x^2 - 4x - 5$
$\quad 0 = (x+1)(x-5)$

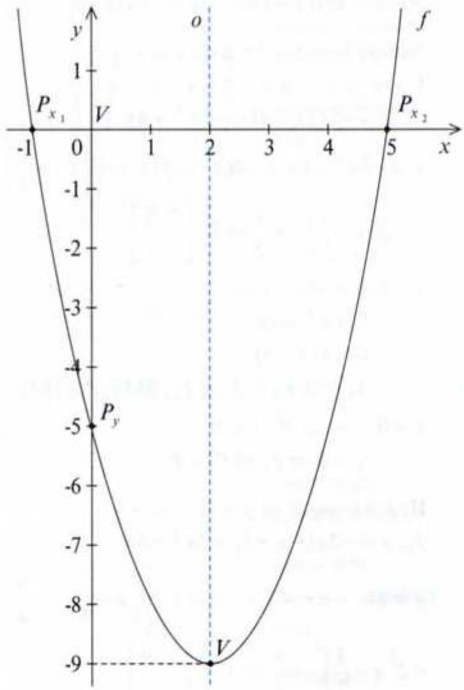
Upravíme predpis funkcie. Určíme minimum funkcie. Funkcia má minimum pre $x = 2$, a to $y = -9$, sú to vlastne súradnice vrcholu paraboly. Priesečníky s osou x, resp. y hľadáme tak, že hľadáme bod grafu so súradnicou $y = 0$, resp. $x = 0$.

$$x_1 = -1,\ x_2 = 5 \Rightarrow P_{x1}\,[-1, 0],\ P_{x2}\,[5, 0]$$

$$x = 0:\quad y = 0^2 - 4\cdot 0 - 5$$

$$y = -5 \Rightarrow P_y\,[0, -5]$$

Grafom funkcie $f\colon y = x^2 - 4x - 5$ je parabola, os paraboly je rovnobežná s osou y a má rovnicu $x = 2$. $D(f) = R$, $H(f) = \langle -9, \infty)$, funkcia nie je párna ani nepárna, je zdola ohraničená, vrchol $V[2, -9]$ určuje minimum tejto funkcie (je to $f(2) = -9$), nie je prostá, pre $x \in (-\infty, 2\rangle$ klesá, pre $x \in \langle 2, \infty)$ rastie.



Kvadratická funkcia s absolútnou hodnotou

Úlohy, v ktorých sa vyskytuje kvadratická funkcia s absolútnou hodnotou, riešime obdobne ako lineárne funkcie s absolútnou hodnotou, teda metódou intervalov a nulových bodov.

Pr. 6

Načrtni graf funkcie $f\colon y = x|x|$ a urči jej vlastnosti.

Nulový bod: $x = 0$

I. $x \in \langle 0, \infty) \Rightarrow |x| = x$

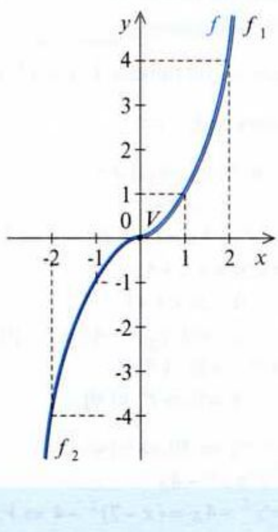
$f_1\colon y = x^2$

II. $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow |x| = -x$

$f_2\colon y = -x^2$

$f = f_1 \cup f_2$

$D(f) = R$, $H(f) = R$, funkcia je nepárna, na celom $D(f)$ rastie. Funkcia nie je ohraničená zhora ani zdola, nemá maximum ani minimum.



Pr. 7

Načrtni graf funkcie f: $y = -2x|x-3|$.

Nulový bod: $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ — Nájdeme nulový bod.

I. $x \in \langle 3, \infty) \Rightarrow |x-3| = x - 3$

f_1: $y = -2x(x-3) = -2x^2 + 6x$ — Upravíme predpis funkcie a zistíme vrchol paraboly.

$y = -2x^2 + 6x = -2(x^2 - 3x) = -2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] =$

$= -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \Rightarrow V_1\left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right]$

$y = 0$: $0 = -2x^2 + 6x$ — Nájdeme priesečníky s osou x.

$0 = x^2 - 3x$

$0 = x(x-3)$

$x_1 = 0, x_2 = 3 \Rightarrow P_{x1}\,[0, 0], P_{x2}\,[3, 0]$

$x = 0$: $y = -2 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0$ — Nájdeme priesečník s osou y.

$y = 0 \Rightarrow P_y\,[0, 0] = P_{x1}$

II. $x \in (-\infty, 3) \Rightarrow |x-3| = -x + 3$

f_2: $y = -2x(-x+3) = 2x^2 - 6x$ — Upravíme predpis funkcie a zistíme vrchol paraboly.

$y = 2x^2 - 6x = 2(x^2 - 3) = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] =$

$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} \Rightarrow V_2\left[\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right]$

$y = 0$: $0 = 2x^2 - 6x$ — Nájdeme priesečníky s osou x.

$0 = x^2 - 3x$

$0 = x(x-3)$

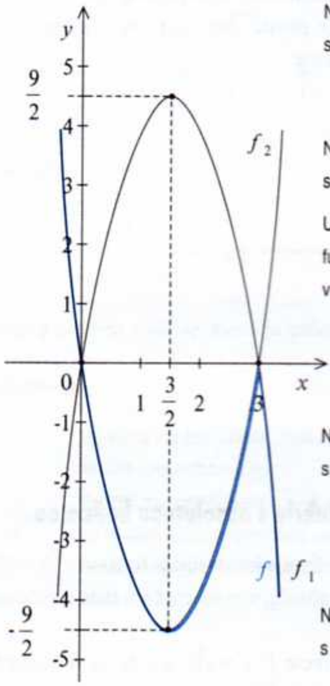
$x_1 = 0, x_2 = 3 \Rightarrow P_{x1}\,[0, 0], P_{x2}\,[3, 0]$

$x = 0$: $y = 2 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0$ — Nájdeme priesečník s osou y.

$y = 0 \Rightarrow P_y\,[0, 0] = P_{x1}$

$f = f_1 \cup f_2$

$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \mathbb{R}$



Pr. 8

Načrtni graf funkcie f: $y = x^2 + 4|x|$ a urči jej vlastnosti.

Nulový bod: $x = 0$ — Nájdeme nulový bod.

I. $x \in \langle 0, \infty) \Rightarrow |x| = x$

f_1: $y = x^2 + 4x$ — Upravíme predpis funkcie a zistíme vrchol paraboly.

$y = x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4 \Rightarrow V_1\,[-2, -4]$

$y = 0$: $0 = x^2 + 4x$ — Nájdeme priesečníky s osou x.

$0 = x(x+4)$

$x_1 = 0, x_2 = -4 \Rightarrow P_{x1}\,[0, 0], P_{x2}\,[-4, 0]$

$x = 0$: $y = 0^2 + 4 \cdot 0$ — Nájdeme priesečník s osou y.

$y = 0 \Rightarrow P_y\,[0, 0]$

II. $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow |x| = -x$

f_2: $y = x^2 - 4x$ — Upravíme predpis funkcie a zistíme vrchol paraboly.

$y = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4 \Rightarrow V_1\,[2, -4]$

$y=0\colon\ 0=x^2-4x$

$\quad 0=x(x-4)$

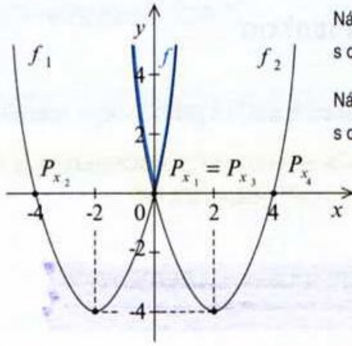
$\quad x_3=0,\ x_4=4 \Rightarrow P_{x3}\,[0,0],\ P_{x4}\,[4,0]$

$x=0\colon\ y=0^2-4\cdot 0$

$\quad y=0 \Rightarrow P_y\,[0,0]$

$f=f_1 \cup f_2$

$D(f)=\mathbb{R}$, $H(f)=\langle 0,\infty)$, funkcia je zdola ohraničená, párna, minimum má v bode $[0,0]$, pre $x\in(-\infty,0\rangle$ klesá, pre $x\in\langle 0,\infty)$ rastie.



Nájdeme priesečníky s osou *x*.

Nájdeme priesečník s osou *y*.

Pr. 9

Načrtni graf funkcie $f\colon y=\left|x^2+4x\right|$ a urči jej vlastnosti.

$f_1\colon y=x^2+4x$

Vyšetríme graf pomocnej funkcie f_1.

$y=x^2+4x=(x+2)^2-4 \Rightarrow V[-2,-4]$

$y=0\colon\ 0=x^2+4x$

$\quad 0=x(x+4)$

$\quad x_1=0,\ x_2=-4 \Rightarrow P_{x1}\,[0,0],\ P_{x2}\,[-4,0]$

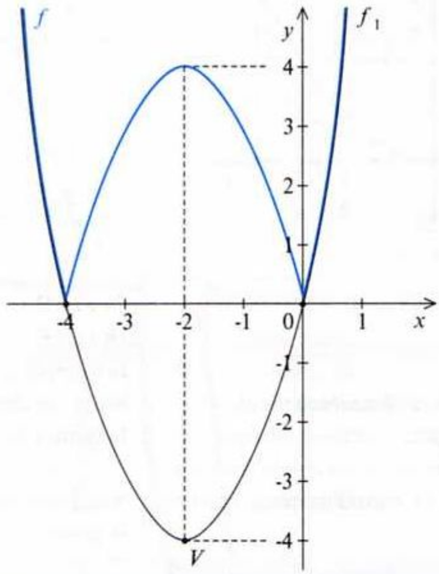
$x=0\colon\ y=0^2+4\cdot 0$

$\quad y=0 \Rightarrow P_y\,[0,0]$

Určíme vrchol paraboly a priesečníky s osami.

Načrtneme graf pomocnej funkcie f_1.

$D(f)=\mathbb{R}$, $H(f)=\langle 0,\infty)$, funkcia je zdola ohraničená, nie je párna ani nepárna, pre $x\in(-\infty,-4\rangle\cup\langle -2,0\rangle$ klesá, pre $x\in\langle -4,-2\rangle\cup\langle 0,\infty)$ rastie.



Všetky hodnoty funkcie f sú však nezáporné, preto výslednú funkciu získame z funkcie f_1 tak, že všetky body so zápornou *y*-ovou súradnicou zobrazíme súmerne podľa osi *x*.

16. Mocninová funkcia

Obsah kapitoly:

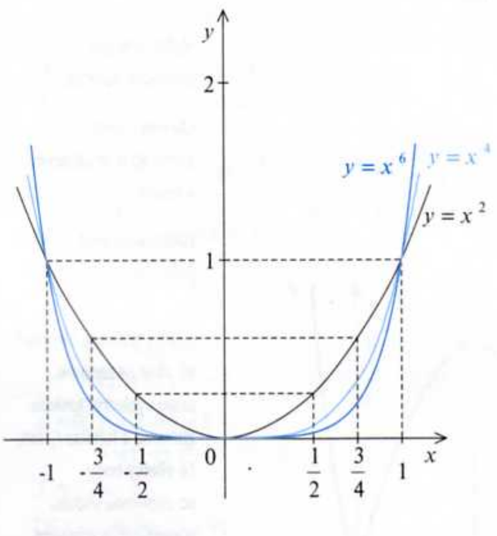
- Pojem mocninová funkcia s prirodzeným mocniteľom
- Druhy mocninových funkcií s prirodzeným mocniteľom
- Pojem mocninová funkcia so záporným celočíselným mocniteľom
- Druhy mocninových funkcií so záporným celočíselným mocniteľom

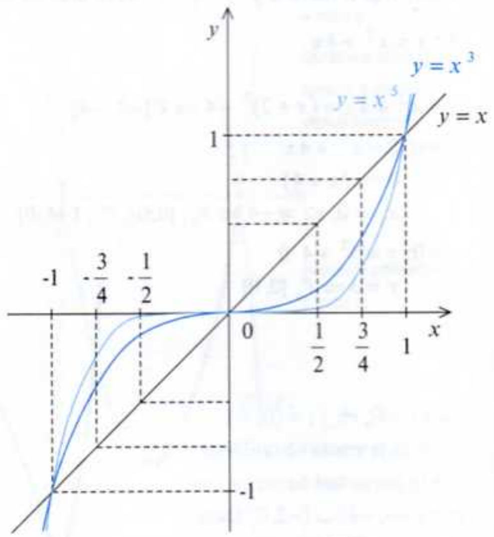
Pojem mocninová funkcia s prirodzeným mocniteľom

MOCNINOVÁ FUNKCIA S PRIRODZENÝM MOCNITEĽOM je funkcia určená predpisom $f\colon y = x^n$, pričom $n \in \mathrm{N}$.

Druhy mocninových funkcií s prirodzeným mocniteľom

Vlastnosti mocninových funkcií v závislosti od mocniteľa n:

<table>
<tr><th>n PÁRNE</th><th>n NEPÁRNE</th></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>$\mathrm{D}(f) = \mathrm{R}$
$\mathrm{H}(f) = \langle 0, \infty)$
Je to párna funkcia.
Je ohraničená zdola, zhora ohraničená nie je.
Pre $x \in (-\infty, 0\rangle$ je klesajúca,
pre $x \in \langle 0, \infty)$ je rastúca.
Má minimum v bode [0, 0], maximum nemá.
Nie je prostá.</td><td>$\mathrm{D}(f) = \mathrm{R}$
$\mathrm{H}(f) = \mathrm{R}$
Je to nepárna funkcia.
Nie je ani zhora, ani zdola ohraničená.
Je rastúca $\forall x \in \mathrm{D}(f)$.

Nemá minimum ani maximum.
Je prostá.</td></tr>
</table>

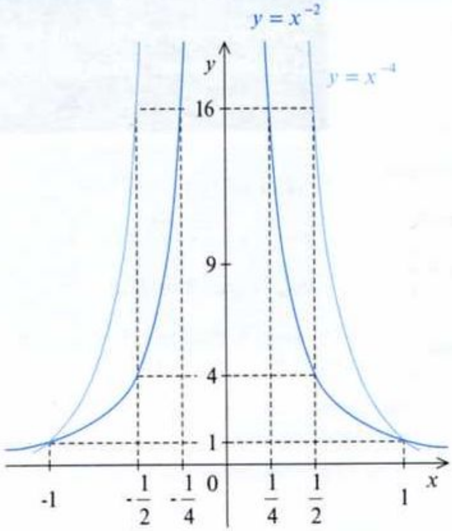
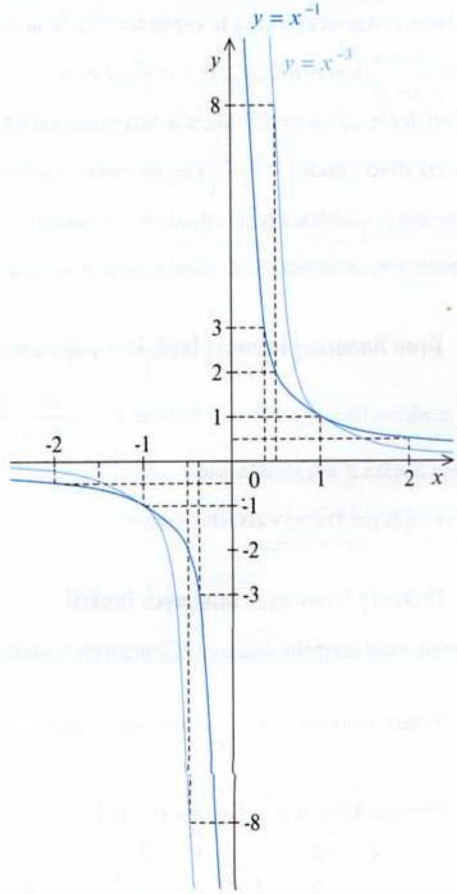
Pojem mocninová funkcia so záporným celočíselným mocniteľom

MOCNINOVÁ FUNKCIA SO ZÁPORNÝM CELOČÍSELNÝM MOCNITEĽOM je funkcia určená predpisom $f\colon y = x^{-n}$, pričom $n \in \mathrm{N}$.

Funkciu $f\colon y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ nazývame NEPRIAMA ÚMERNOSŤ.

Druhy mocninových funkcií so záporným celočíselným mocniteľom

Vlastnosti mocninových funkcií v závislosti od mocniteľa n:

<table>
<tr><th>n PÁRNE</th><th>n NEPÁRNE</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$H(f) = (0, \infty)$
Je to párna funkcia.
Je ohraničená zdola, zhora ohraničená nie je.
Pre $x \in (-\infty, 0)$ je rastúca,
pre $x \in (0, \infty)$ je klesajúca.
Nemá maximum ani minimum.
Nie je prostá.</td><td>$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$H(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Je to nepárna funkcia.
Nie je ani zhora, ani zdola ohraničená.
Je klesajúca $\forall x \in D(f)$.

Nemá minimum ani maximum.
Je prostá.</td></tr>
</table>

17. Lineárna lomená funkcia

Obsah kapitoly:

- Pojem lineárna lomená funkcia a jej graf
- Druh lineárnej lomenej funkcie - nepriama úmernosť
- Príklady lineárnych lomených funkcií
- Lineárna lomená funkcia s absolútnou hodnotou

Pojem lineárna lomená funkcia a jej graf

LINEÁRNA LOMENÁ FUNKCIA je každá funkcia daná predpisom

$f\colon y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, kde $a, b, c, d \in \mathrm{R}$, $c \neq 0$, $ad \neq bc$.

Grafom lineárnej lomenej funkcie je ROVNOOSOVÁ HYPERBOLA, ktorá má stred v bode $\left[-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right]$ a jej asymptoty (priamky ohraničujúce hyperbolu) prechádzajú týmto stredom. Asymptoty sú rovnobežné s jednotlivými súradnicovými osami a majú rovnice $x = -\dfrac{d}{c}$ a $y = \dfrac{a}{c}$.

Ak by sa $c = 0$, tak $f\colon y = \dfrac{ax+b}{d} = kx + q$, čo je lineárna funkcia (pozri kapitolu č. 14).

Druh lineárnej lomenej funkcie - nepriama úmernosť

Ak v predpise lineárnej lomenej funkcie $f\colon y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ zvolíme $a = 0$ a $d = 0$, dostaneme $f\colon y = \dfrac{b}{cx} = \dfrac{k}{x}$, čo je predpis pre tzv. NEPRIAMU ÚMERNOSŤ.

Príklady lineárnych lomených funkcií

Pri vyšetrovaní priebehu lineárnych lomených funkcií využívame všetky poznatky z kapitol č. 13, 14, 15 a 16.

Pr. 1

Vyšetri funkciu $f\colon y = \dfrac{1}{x}$ a načrtni jej graf.

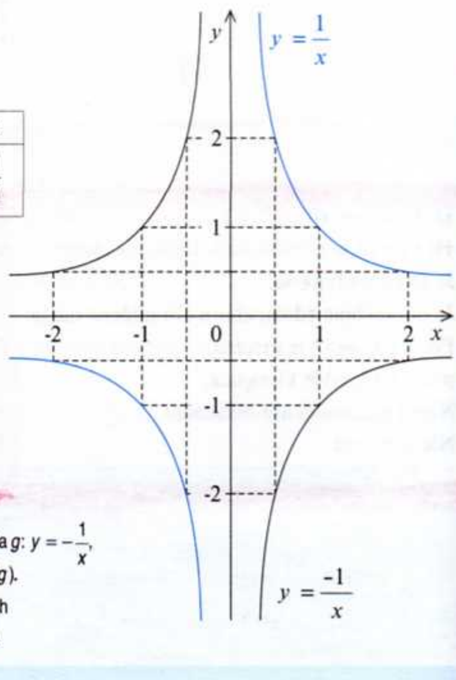
Podmienky: $x \neq 0 \Rightarrow \mathrm{D}(f) = \mathrm{R} - \{0\}$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	n. d.	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

n. d. znamená „nie je definovaná"

$f\colon y = \dfrac{1}{x} \Rightarrow a = 0, b = 1, c = 1, d = 0$

$\mathrm{D}(f) = \mathrm{R} - \{0\}$, $\mathrm{H}(f) = \mathrm{R} - \{0\}$,
grafom funkcie je hyperbola, ktorej stred je v začiatku súradníc a asymptoty sú $x = 0$, $y = 0$.
Funkcia nemá maximum ani minimum, nie je ohraničená zhora ani zdola.
Funkcia je nepárna a klesajúca na intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, teda je prostá.



Na obrázku je aj funkcia $g\colon y = -\dfrac{1}{x}$, $\mathrm{H}(g) = \mathrm{H}(f)$, $\mathrm{D}(f) = \mathrm{D}(g)$. Funkcia g na intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ rastie.

Pr. 2

Vyšetri funkciu f: $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ a načrtni jej graf.

Podmienky: $x \neq 1 \Rightarrow \mathrm{D}(f) = \mathrm{R} - \{1\}$

$(x+1):(x-1) = 1 + \dfrac{2}{x-1}$

f: $y = \dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$

$y = 0$: $\quad x + 1 = 0$

$x = -1 \Rightarrow P_x\,[-1, 0]$

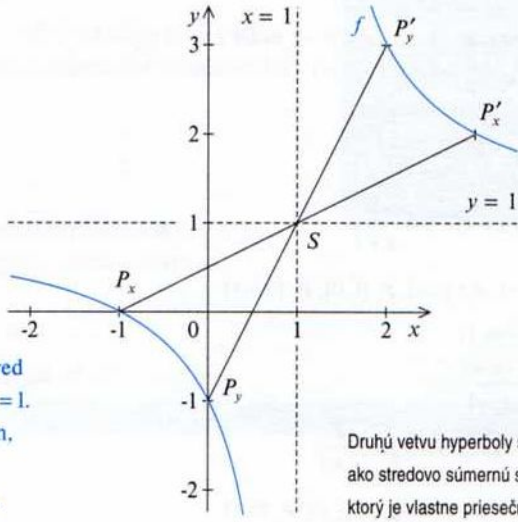
$x = 0$: $\quad y = \dfrac{1}{-1}$

$y = -1 \Rightarrow P_y = [0, -1]$

Z toho vyplýva, že priamka $x = 1$ je asymptotou funkcie f.

Druhú asymptotu určíme delením, má rovnicu $y = 1$.

Určíme priesečníky s osami x a y.



Druhú vetvu hyperboly sme zostrojili ako stredovo súmernú so stredom S, ktorý je vlastne priesečníkom oboch asymptot.

$\mathrm{D}(f) = \mathrm{R} - \{1\}$,
$\mathrm{H}(f) = \mathrm{R} - \{1\}$,
grafom funkcie je hyperbola, ktorej stred je v bode [1, 1] a asymptoty sú $x = 1$, $y = 1$.
Funkcia nemá maximum ani minimum, nie je ohraničená zhora ani zdola.
Funkcia nie je ani párna, ani nepárna, funkcia je klesajúca na intervaloch $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$, teda je prostá.

Pr. 3

Vyšetri funkciu f: $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ a načrtni jej graf.

Podmienky: $x \neq 1 \Rightarrow \mathrm{D}(f) = \mathrm{R} - \{1\}$

Priamky $x = 1$ a $y = 2$ sú asymptotami funkcie f.

$(2x-1):(x-1) = 2 + \dfrac{1}{x-1}$

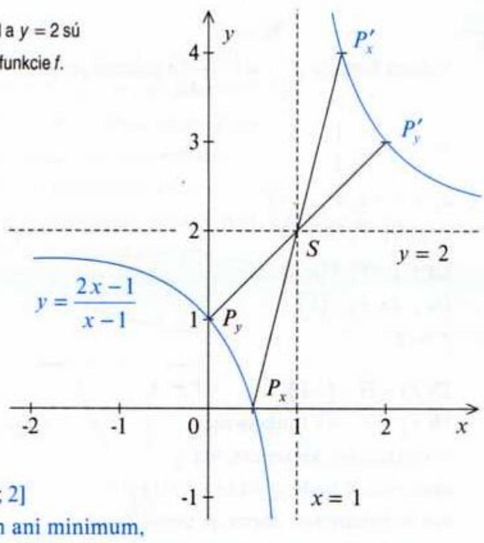
f: $y = \dfrac{2x-1}{x-1} = 2 + \dfrac{1}{x-1}$

$y = 0$: $\quad 2x - 1 = 0$

$x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow P_x \left[\dfrac{1}{2}, 0\right]$

$x = 0$: $\quad y = \dfrac{-1}{-1}$

$y = 1 \Rightarrow P_y = [0, 1]$



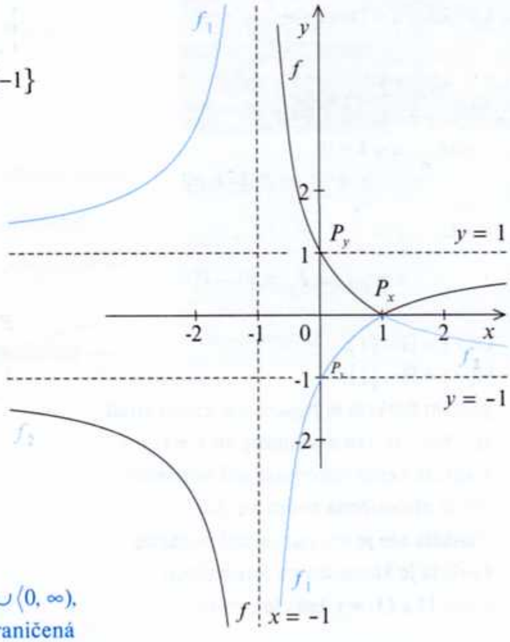
$\mathrm{D}(f) = \mathrm{R} - \{1\}$, $\mathrm{H}(f) = \mathrm{R} - \{2\}$,
grafom funkcie je hyperbola, ktorej stred je v bode [1; 2] a asymptoty sú $x = 1$, $y = 2$. Funkcia nemá maximum ani minimum, nie je ohraničená zhora ani zdola. Funkcia nie je ani párna, ani nepárna, funkcia je klesajúca na intervaloch $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$, teda je prostá.

Lineárna lomená funkcia s absolútnou hodnotou

Obdobne ako pri iných funkciách s absolútnou hodnotou (pozri kapitoly č. 14, 15), používame pri konštrukcii grafu metódu nulových bodov.

Pr. 4

Vyšetri funkciu $f\colon y = \dfrac{|x-1|}{x+1}$ a načrtni jej graf.



Podmienky: $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \Rightarrow \mathsf{D}(f) = \mathsf{R} - \{-1\}$

Nulový bod: $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

I. $x \in \langle 1, \infty)$

$f_1\colon y = \dfrac{x-1}{x+1}$

$(x-1):(x+1) = 1 - \dfrac{2}{x+1}$

$a_1\colon x = -1,\ a_2\colon y = 1,\ P_x\,[1, 0],\ P_y\,[0, -1]$

II. $x \in (-\infty, 1)$

$f_2\colon y = \dfrac{-x+1}{x+1}$

$(-x+1):(x+1) = -1 + \dfrac{2}{x+1}$

$a_1\colon x = -1,\ a_2\colon y = -1,\ P_x\,[1, 0],\ P_y\,[0, 1]$

$\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} - \{-1\}$, $\mathsf{H}(f) = \mathsf{R} - \langle -1, 0) = (-\infty, -1) \cup \langle 0, \infty)$,
funkcia nemá maximum ani minimum, nie je ohraničená zhora ani zdola. Funkcia nie je ani párna, ani nepárna.
Rastie na intervale $\langle 1, \infty)$, klesá na intervaloch $(-1, 1\rangle$ a $(-\infty, -1)$.
Nie je rastúca ani klesajúca.

Pr. 5

Vyšetri funkciu $f\colon y = \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ a načrtni jej graf.

$f'\colon y = \dfrac{x-1}{x+1}$

$a_1\colon x = -1,\ a_2\colon y = 1$

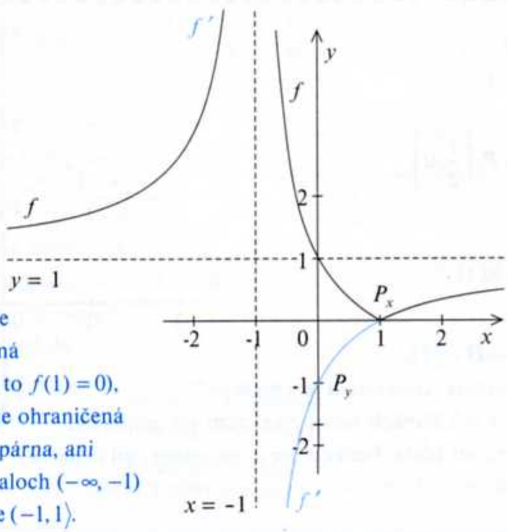
$P_x\,[1, 0],\ P_y\,[0, -1]$

$\mathsf{D}(f') = \mathsf{R} - \{-1\}$

$\mathsf{H}(f') = \mathsf{R} - \{1\}$

$f = |f'|$

$\mathsf{D}(f) = \mathsf{R} - \{-1\}$,
$\mathsf{H}(f) = \langle 0, \infty)$, funkcia nie je rastúca ani klesajúca, má minimum v bode $x = 1$ (a to $f(1) = 0$), nie je ohraničená zhora, je ohraničená zdola. Funkcia nie je ani párna, ani nepárna. Rastie na intervaloch $(-\infty, -1)$ a $\langle 1, \infty)$, klesá na intervale $(-1, 1\rangle$.



Vyšetríme graf pomocnej funkcie f' (ako v predchádzajúcej kapitole f_1).

Všetky hodnoty funkcie f však musia byť nezáporné, preto hodnoty funkcie f', ktoré sú záporné, zobrazíme osovo súmerne podľa osi x.

18. Exponenciálna a logaritmická funkcia, exponenciálne a logaritmické rovnice a nerovnice

Obsah kapitoly:

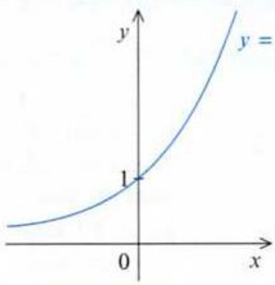
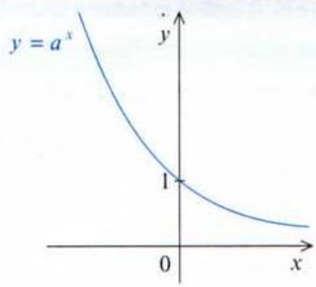
Pojem exponenciálna funkcia a jej graf

EXPONENCIÁLNA FUNKCIA so základom a je určená predpisom $f\colon y = a^x$, pričom $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Grafom exponenciálnej funkcie je EXPONENCIÁLA (exponenciálna krivka).

Druhy exponenciálnych funkcií

Exponenciálna funkcia $f\colon y = 10^x$ sa nazýva DEKADICKÁ EXPONENCIÁLNA FUNKCIA. Exponenciálna funkcia $f\colon y = e^x$, pričom základ sa rovná e (tzv. Eulerovo číslo, $e = 2{,}718281...$), sa nazýva PRIRODZENÁ EXPONENCIÁLNA FUNKCIA.

Vlastnosti exponenciálnej funkcie $f\colon y = a^x$ závislé od jej základu a:

$a \in (1, \infty)$	$a \in (0, 1)$
	
$D(f) = R$, $H(f) = (0, \infty)$ Funkcia nie je párna ani nepárna. Funkcia je zdola ohraničená. Je rastúca, teda prostá. Nemá maximum ani minimum. Graf prechádza bodom $[0, 1]$ a bodom $[1, a]$. Os x je asymptotou grafu.	$D(f) = R$, $H(f) = (0, \infty)$ Funkcia nie je párna ani nepárna. Funkcia je zdola ohraničená. Je klesajúca, teda prostá. Nemá maximum ani minimum. Graf prechádza bodom $[0, 1]$ a bodom $[1, a]$. Os x je asymptotou grafu.

Pr. 1

Načrtni graf funkcie $f\colon y = 2^{|x|}$.

Nulový bod: $x = 0$

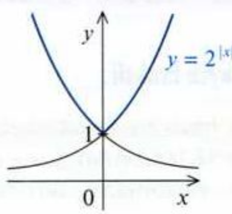
I. $x \in \langle 0; \infty)$

$f_1\colon y = 2^x$

II. $x \in (-\infty, 0)$

$f_2\colon y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$f = f_1 \cup f_2$

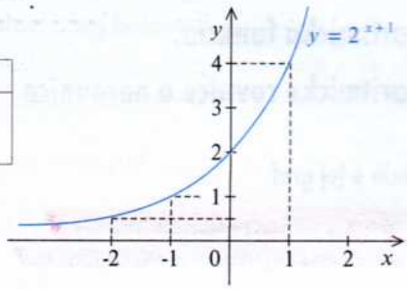


$D(f) = R$, $H(f) = \langle 1, \infty)$

Pr. 2

Načrtni graf funkcie f: $y = 2^{x+1}$.

x	-2	-1	0	1
y	$\frac{1}{2}$	1	2	4



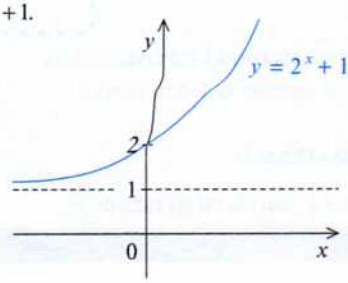
$D(f) = R$, $H(f) = (0, \infty)$

Graf prechádza bodom [0; 2].

Graf je vzhľadom na graf funkcie $y = 2^x$ posunutý o 1 doľava.

Pr. 3

Načrtni graf funkcie f: $y = 2^x + 1$.



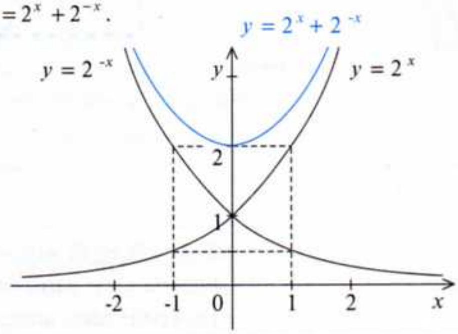
$D(f) = R$, $H(f) = (1, \infty)$

Asymptotou je priamka s rovnicou $y = 1$.

Graf je vzhľadom na graf funkcie $y = 2^x$ posunutý o 1 nahor.

Pr. 4

Načrtni graf funkcie f: $y = 2^x + 2^{-x}$.



$D(f) = R$, $H(f) = \langle 2, \infty)$

Pri zostrojovaní grafu funkcie f sme použili grafy funkcií $f_1: y = 2^x$ a $f_2: y = 2^{-x}$, ktorých funkčné hodnoty pre rovnaké x sme sčítali.

$f(x) = f(-x) \Rightarrow$ funkcia je párna, jej graf je súmerný podľa osi y.

Pojem logaritmická funkcia a jej graf

LOGARITMICKÁ FUNKCIA so základom a, pričom $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, je funkcia inverzná k exponenciálnej funkcii s rovnakým základom a má predpis f: $y = \log_a x$, pričom $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$. Grafom logaritmickej funkcie je LOGARITMICKÁ KRIVKA.

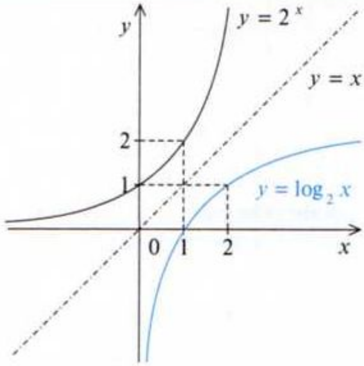
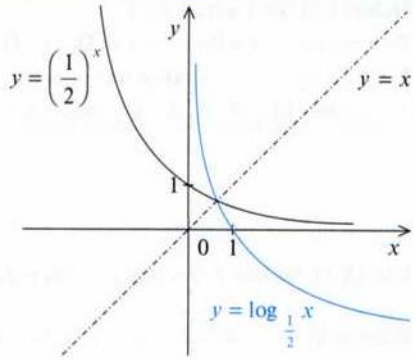
Druhy logaritmických funkcií

Najčastejšie sa vyskytujú logaritmy so základom 10 a so základom e. Sú to tzv. DEKADICKÉ LOGARITMY f: $y = \log_{10} x$ (píšeme $\log_{10} x = \log x$) alebo tzv. PRIRODZENÉ LOGARITMY f: $y = \ln x$ (píšeme $\log_e x = \ln x$).

Funkcie f: $y = \log_a x$ a g: $y = a^x$ sú navzájom inverzné, čiže grafy týchto funkcií sú súmerné podľa priamky $y = x$.

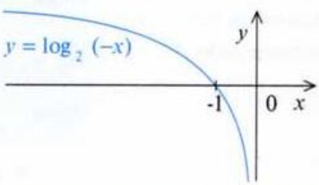
Graf funkcie $y = \log_2 x$ je súmerný s grafom funkcie $y = 2^x$ podľa priamky $y = x$, čím je potvrdená inverznosť týchto funkcií. Graf funkcie $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ je súmerný s grafom funkcie $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ podľa priamky $y = x$, čím je potvrdená inverznosť týchto funkcií.

Vlastnosti logaritmickej funkcie f: $y = \log_a x$ v závislosti od jej základu a:

$a \in (1, \infty)$	$a \in (0, 1)$
	
$D(f) = (0, \infty)$, $H(f) = R$ Funkcia nie je párna ani nepárna. Funkcia nie je ohraničená zhora ani zdola. Je rastúca, teda prostá. Nemá maximum ani minimum. Graf log. funkcie prechádza bodom [1; 0] a [a, 1]. Os y je asymptotou grafu.	$D(f) = (0, \infty)$, $H(f) = R$ Funkcia nie je párna ani nepárna. Funkcia nie je ohraničená zhora ani zdola. Je klesajúca, teda prostá. Nemá maximum ani minimum. Graf log. funkcie prechádza bodom [1; 0] a [a, 1]. Os y je asymptotou grafu.

Pr. 5

Načrtni graf funkcie
f: $y = \log_2 (-x)$.



$D(f) = (-\infty, 0)$
$H(f) = R$
Graf je súmerný s grafom $y = \log_2 x$ podľa osi y.

Pr. 6

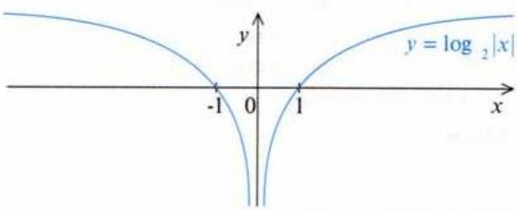
Načrtni graf funkcie
f: $y = \log_2 |x|$.

Nulový bod: $x = 0$

I. $x \in (-\infty, 0)$
$f_1 : y = \log_2 (-x)$

II. $x \in (0, \infty)$
$f_2 : y = \log_2 x$

$f = f_1 \cup f_2$

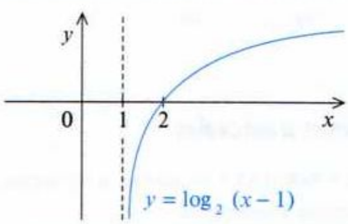


$D(f) = R - \{0\}$
$H(f) = R$

Pr. 7

Načrtni graf funkcie
f: $y = \log_2 (x - 1)$.

Podmienky:
$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow D(f) = (1, \infty)$



$H(f) = R$
Priamka s rovnicou $x = 1$ je asymptotou grafu.
Graf je vzhľadom na graf funkcie $y = \log_2 x$ posunutý o 1 doprava.

Pr. 8

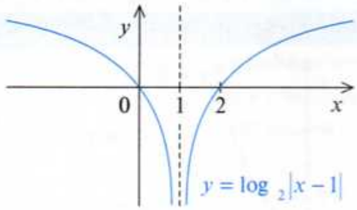
Načrtni graf funkcie $f\colon y = \log_2 |x-1|$.

Nulový bod: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Podmienky: $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \Rightarrow D(f) = R - \{1\}$

I. $x \in \langle 1, \infty)$ **II.** $x \in (-\infty, 1)$

$f_1\colon y = \log_2 (x-1)$ $f_2\colon y = \log_2 (-x+1)$



$H(f) = R$

Priamka $x = 1$ je asymptotou grafu.

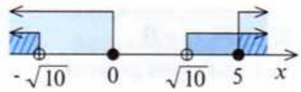
Pr. 9

Urči $D(f)$ funkcie $f\colon y = \log(x^2 - 10) + \sqrt{x^2 - 5x}$.

Podmienky: $x^2 - 10 > 0 \quad \wedge \quad x^2 - 5x \geq 0$

$(x + \sqrt{10})(x - \sqrt{10}) > 0 \qquad x(x-5) \geq 0$

$x \in (-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, \infty) \qquad x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 5, \infty)$



$D(f) = (-\infty, -\sqrt{10}) \cup \langle 5, \infty)$

Logaritmus čísla

Funkčné hodnoty logaritmickej funkcie sa nazývajú LOGARITMY.

Logaritmus čísla A pri základe z je ten exponent m, na ktorý musíme umocniť základ z, aby sme dostali logaritmované číslo A:

$\log_z A = m \Leftrightarrow z^m = A$

Medzi logaritmami pri rôznych základoch platí prevodný vzťah:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Podľa uvedeného vzťahu platí:

$$\log a = \frac{\ln a}{\ln 10} \quad \Rightarrow \quad \ln a = \ln 10 \cdot \log a$$

Pr. 10

Urči $\log_5 5$.

$\log_5 5 = m$

$5^m = 5^1 \Leftrightarrow m = 1$

$\log_5 5 = 1$

Využijeme definíciu logaritmu.

Pr. 11

Urči $\log_{10} 1\,000$.

$\log_{10} 1\,000 = m$

$10^m = 1\,000$

$10^m = 10^3 \Leftrightarrow m = 3$

$\log_{10} 1\,000 = 3$

Pr. 12

Urči $\log_2 \frac{1}{16}$.

$\log_2 \frac{1}{16} = m$

$2^m = \frac{1}{16}$

$2^m = 2^{-4} \Leftrightarrow m = -4$

$\log_2 \frac{1}{16} = -4$

Pri počítaní s logaritmami využívame tieto vzťahy, pričom $a > 0$, $a \neq 1$; $x_1, x_2 \in R^+$:

$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$

$\log_a x^r = r \cdot \log_a x$ pre $\forall r \in R$

Exponenciálne rovnice a nerovnice

EXPONENCIÁLNE ROVNICE A NEROVNICE sú rovnice a nerovnice, v ktorých sa neznáma vyskytuje v exponente.

Príkladom exponenciálnej rovnice je rovnica: $3^x = 9$.

Rovnice typu $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ riešime porovnaním exponentov (pričom $a > 0, a \neq 1$). Rovnice typu $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ riešime logaritmovaním na tvar $f(x) \cdot \log a = g(x) \cdot \log b$ (pre $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1, a \neq b$).

Pr. 13

Rieš v R rovnicu: $\dfrac{3^{x-6}}{3^{5-2x}} = \dfrac{\log 27}{\log 3}$

$$3^{(x-6)-(5-2x)} = \frac{3\log 3}{\log 3}$$

Využijeme vzťah $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ a vzťah $\log x^r = r \log x$.

$$3^{3x-11} = 3 \Rightarrow 3x - 11 = 1$$
$$3x = 12$$
$$x = 4$$

$\mathrm{K} = \{4\}$

Pr. 14

Rieš v R rovnicu: $2^x \cdot 3^{3x} = 4^{x-1}$

$$2^x \cdot 3^{3x} = 2^{2x-2}$$

Rovnicu zlogaritmujeme.

$$\log(2^x \cdot 3^{3x}) = \log 2^{2x-2}$$

Využijeme vzťah $\log x_1 x_2 = \log x_1 + \log x_2$.

$$\log 2^x + \log 3^{3x} = \log 2^{2x-2}$$

Využijeme vzťah $\log x^r = r \log x$.

$$x \log 2 + 3x \log 3 = (2x-2)\log 2$$

Roznásobením odstránime zátvorky.

$$x \log 2 + 3x \log 3 = 2x \log 2 - 2\log 2$$
$$2\log 2 = 2x \log 2 - 3x \log 3 - x \log 2$$

Upravíme rovnicu tak, aby bola neznáma x len na jej jednej strane.

$$2\log 2 = x \log 2 - 3x \log 3$$
$$2\log 2 = x(\log 2 - 3\log 3)$$

Vypočítame x.

$$x = \frac{2\log 2}{\log 2 - 3\log 3}$$

Upravíme využitím vzťahu $r \log x = \log x^r$.

$$x = \frac{\log 4}{\log 2 - \log 27}$$

$\mathrm{K} = \left\{\dfrac{\log 4}{\log 2 - \log 27}\right\}$

Pr. 15

Rieš v R rovnicu: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1+x}{1-x}} > 243$

Podmienky: $x \neq 1$

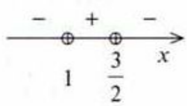
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1+x}{1-x}} > 3^5$$

Využijeme vzťah $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$.

$$3^{\frac{-1-x}{1-x}} > 3^5 \Leftrightarrow \frac{-1-x}{1-x} > 5$$

Nerovnicu upravíme na podielový tvar.

$$\frac{-1-x-5+5x}{1-x} > 0$$
$$\frac{-6+4x}{1-x} > 0$$
$$\frac{2(2x-3)}{1-x} > 0$$



$\mathrm{K} = \left(1; \dfrac{3}{2}\right)$

Logaritmické rovnice a nerovnice

EXPONENCIÁLNE ROVNICE A NEROVNICE sú rovnice a nerovnice, v ktorých sa neznáma vyskytuje buď v logaritmovanom výraze, alebo je neznáma základom logaritmov.

Pri riešení logaritmických rovníc a nerovníc postupujeme ako pri riešení rovníc a nerovníc v predchádzajúcich kapitolách. Nesmieme však zabudnúť na určenie podmienok existencie logaritmu daného výrazu.

Pr. 16

Rieš v R rovnicu: $\dfrac{5\log x+3}{3\log x-4}=\dfrac{\log x+5}{3\log x-4}-2$

Podmienky: $x>0$,

$3\log x-4\neq 0 \Rightarrow \log x\neq \frac{4}{3} \Rightarrow x\neq 10^{\frac{4}{3}}$

$$\frac{5\log x+3}{3\log x-4}=\frac{\log x+5}{3\log x-4}-2 \qquad /\cdot(3\log x-4)$$
$$5\log x+3=\log x+5-2(3\log x-4)$$
$$5\log x+3=\log x+5-6\log x+8$$
$$10\log x=10$$
$$\log x=1$$
$$x=10$$

$K=\{10\}$

Pr. 17

Rieš v R rovnicu: $\log x+\dfrac{3}{\log x}=4$

Podmienky: $x>0$, $\log x\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$

$$\log x+\frac{3}{\log x}=4 \qquad /\cdot\log x$$
$$\log^2 x+3=4\log x$$
$$\log^2 x-4\log x+3=0$$

Substitúcia: $\log x = A$

$$A^2-4A+3=0$$
$$(A-3)(A-1)=0$$
$$A_1=3 \qquad A_2=1$$
$$\log x_1=3 \qquad \log x_2=1$$
$$x_1=10^3 \qquad x_2=10$$

Dosadíme naspäť do substitúcie.

$K=\{10;10^3\}$

Pr. 18

Rieš v R rovnicu: $1\leq \dfrac{2\log x+3}{3}\leq \dfrac{5}{3}$

Podmienky: $x>0$

$$\frac{2\log x+3}{3}\geq 1 \quad \wedge \quad \frac{2\log x+3}{3}\leq \frac{5}{3}$$
$$2\log x+3\geq 3 \qquad 2\log x+3\leq 5$$
$$2\log x\geq 0 \qquad 2\log x\leq 2$$
$$\log x\geq 0 \qquad \log x\leq 1$$
$$x\geq 1 \qquad x\leq 10$$

Je to vlastne sústava dvoch nerovníc s jednou neznámou. Vyriešime každú nerovnicu samostatne, celkové riešenie je potom prienikom riešení jednotlivých nerovníc.

$K=\langle 1;10\rangle$

Pr. 19

Rieš v R rovnicu: $\log|x+1|<1$

Podmienky: $x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -1$

Nulové body: $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

I. $x\in(-1,\infty)$

$$\log(x+1)<1$$
$$\log(x+1)<\log 10$$
$$x+1<10$$
$$x<9$$

$K_1=(-1;9)$

II. $x\in(-\infty,-1)$

$$\log(-x-1)<1$$
$$\log(-x-1)<\log 10$$
$$-x-1<10$$
$$x>-11$$

$K_2=(-11;-1)$

Čiastočné riešenie porovnáme s intervalom, v ktorom nerovnicu riešime.

$K=(-11;-1)\cup(-1;9)$

19. Goniometrické funkcie, rovnice a nerovnice

Obsah kapitoly:

- Veľkosť uhla v stupňovej a oblúkovej miere
- Orientovaný uhol
- Pojem goniometrickej funkcie ostrého uhla
- Pojem goniometrickej funkcie v oblúkovej miere (čiže v R) a ich grafy
- Vlastnosti goniometrických funkcií
- Vzťahy medzi goniometrickými funkciami
- Goniometrické rovnice a nerovnice
- Riešenie pravouhlého trojuholníka
- Riešenie všeobecného trojuholníka

Veľkosť uhla v stupňovej a oblúkovej miere

V goniometrii (kam celá kapitola patrí) sa uhly merajú najčastejšie:

- v stupňovej miere v jednotkách $1°$ (stupeň),
- v oblúkovej miere v jednotkách 1 rad (radián).

RADIÁN je stredový uhol, ktorému prislúcha na jednotkovej kružnici oblúk s dĺžkou 1 jednotky.
Dĺžke jednotkovej kružnice ($r = 1$ jednotka), ktorá je 2π, odpovedá uhol 2π rad $= 360°$. Odtiaľ vyplývajú vzťahy:

$$1° = \frac{\pi}{180}\ \text{rad}$$

$$1\ \text{rad} = \frac{180}{\pi} \doteq 57°17'45''$$

O uhle α v stupňoch a zhodnom uhle x v radiánoch platí:

$$\alpha° = \frac{180°}{\pi} \cdot x$$

$$x = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha°$$

V zápise veľkosti uhla v stupňovej miere používame okrem uhlového stupňa ($°$) i uhlovú minútu ($'$) a uhlovú sekundu ($''$), pričom platí: $1° = 60'; 1' = 60''; 1° = 3\,600''$.

Veľkosť uhla v stupňovej miere zapisujeme napr. $30°, 45°, 27°16', 12°35'47''$.
Veľkosť uhla v oblúkovej miere zapisujeme napr. 2 rad, 2π rad $= 2\pi$, $\frac{\pi}{2}$ rad $= \frac{\pi}{2}$ (niekedy značku rad vynechávame).

Pre prevod uhlov zo stupňovej miery na oblúkovú a naopak používame tabuľky alebo kalkulačku.

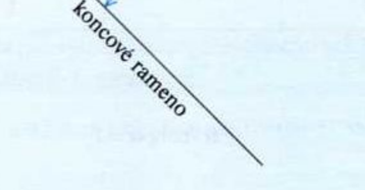
Orientovaný uhol

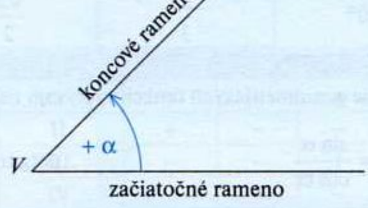
ORIENTOVANÝM UHLOM AVB (zapisujeme $\widehat{AVB}$) nazývame usporiadanú dvojicu polpriamok $\mapsto VA$, $\mapsto VB$, pričom $\mapsto VA$ je ZAČIATOČNÉ RAMENO, $\mapsto VB$ je KONCOVÉ RAMENO, bod V je VRCHOL orientovaného uhla.

ORIENTOVANÝ UHOL $\widehat{AVB}$ má veľkosť:

- v stupňovej miere $|\widehat{AVB}| = \alpha + k \cdot 360°$, pričom $\alpha \in \langle 0°, 360°)$, $k \in Z$
- v oblúkovej miere $|\widehat{AVB}| = \alpha + 2k\pi$ (rad), pričom $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$, $k \in Z$

Ak sa otáča koncové rameno v smere pohybu hodinových ručičiek, je veľkosť uhla záporná.
Ak sa otáča koncové rameno proti smeru pohybu hodinových ručičiek, je veľkosť uhla kladná.





Pr. 1

Vyjadri veľkosti orientovaných uhlov ε, φ v tvare $\alpha + k \cdot 360°$, kde $\alpha \in \langle 0°, 360°)$, $k \in Z$; uhlov ω, ψ v tvare $\alpha + 2k \cdot \pi$, kde $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$, $k \in Z$, ak:

a) $\varepsilon = 760°$ **b)** $\omega = \frac{50}{12}\pi$ **c)** $\varphi = -3000°$ **d)** $\psi = -\frac{47}{3}\pi$

a) $\varepsilon = 760° = 40° + 2 \cdot 360°$

b) $\omega = \frac{50}{12}\pi = \frac{1}{6}\pi + 2 \cdot 2\pi$

c) $\varphi = -3000° = 240° - 9 \cdot 360°$

d) $\psi = -\frac{47}{3}\pi = \frac{\pi}{3} - 8 \cdot 2\pi$

Pojem goniometrické funkcie ostrého uhla

Pravouhlé trojuholníky, ktoré majú jeden ostrý uhol zhodný, sú navzájom podobné. Ak sú podobné, tak aj pomery príslušných strán sú rovnaké. Kvôli uľahčeniu výpočtov je účelné tieto pomery nejako vhodne nazvať (vzhľadom na ich umiestnenie k jednému ostrému uhlu) a tabelovať (zapisovať do tabuliek).

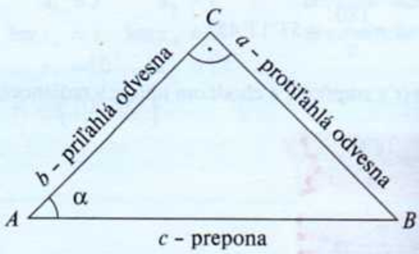
V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou $c = |AB|$, odvesnami $a = |BC|$ a $b = |AC|$ a vnútorným uhlom $\alpha = |\sphericalangle CAB|$ je:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{dĺžka protiľahlej odvesny}}{\text{dĺžka prepony}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{dĺžka priľahlej odvesny}}{\text{dĺžka prepony}}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{dĺžka protiľahlej odvesny}}{\text{dĺžka priľahlej odvesny}}$$

$$\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{dĺžka priľahlej odvesny}}{\text{dĺžka protiľahlej odvesny}}$$



Tieto štyri pomery sa nazývajú **GONIOMETRICKÉ FUNKCIE**.
$\sin\alpha$ je **SÍNUS** uhla α,
$\cos\alpha$ je **KOSÍNUS** uhla α,
$\mathrm{tg}\,\alpha$ je **TANGENS** uhla α,
$\mathrm{cotg}\,\alpha$ je **KOTANGENS** uhla α.

Tabuľka význačných hodnôt goniometrických funkcií:

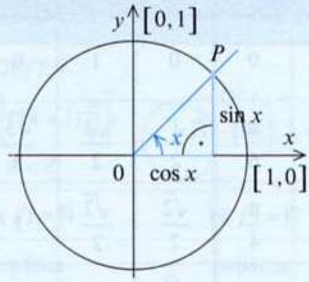
HODNOTY UHLOV		HODNOTY GONIOMETRICKÝCH FUNKCIÍ			
$\alpha°$	α (rad)	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{cotg}\,\alpha$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Z definície goniometrických funkcií vyplývajú tieto vzťahy:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{cotg}\,\alpha = 1$$

Pojem goniometrické funkcie v oblúkovej miere (čiže v R) a ich grafy

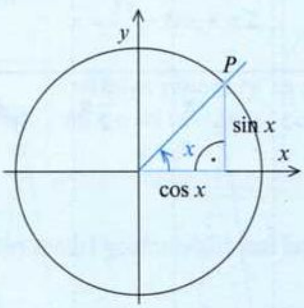
Orientovaný uhol x umiestnime do súradnicovej sústavy $0xy$ tak, aby jeho vrchol bol v začiatku 0 súradnicovej sústavy a jeho začiatočné rameno ležalo na kladnej časti osi x. Ak budeme sledovať priesečník P koncového ramena uhla x s jednotkovou kružnicou $k(0; r = 1)$, môžeme funkcie $y = \sin x$ a $y = \cos x$ definovať takto:



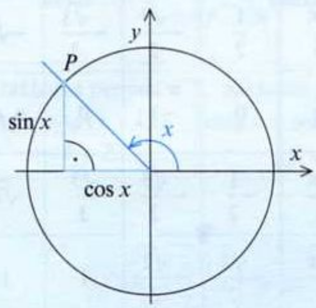
- Funkcia $y = \sin x$ je definovaná ako y-ová súradnica priesečníka P koncového ramena orientovaného uhla x s jednotkovou kružnicou.
- Funkcia $y = \cos x$ je definovaná ako x-ová súradnica priesečníka P koncového ramena orientovaného uhla x s jednotkovou kružnicou.
- Funkcia $y = \operatorname{tg} x$ je definovaná ako pomer funkcií $\sin x$ a $\cos x$, teda $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \wedge \cos x \neq 0$.
- Funkcia $y = \operatorname{cotg} x$ je definovaná ako pomer funkcií $\cos x$ a $\sin x$, teda $y = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \wedge \sin x \neq 0$.

Znamienka hodnôt goniometrických funkcií určíme z definícií jednotlivých funkcií:

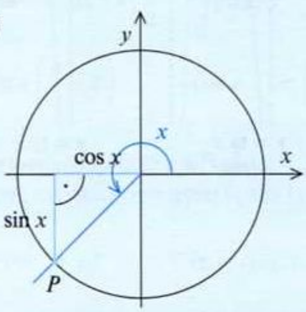
I. kvadrant



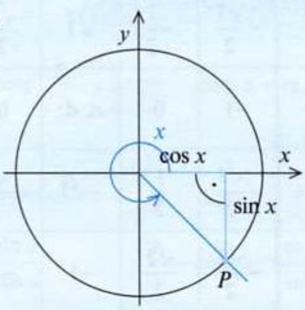
II. kvadrant



III. kvadrant



IV. kvadrant



Tabuľka znamienok hodnôt goniometrických funkcií v jednotlivých kvadrantoch:

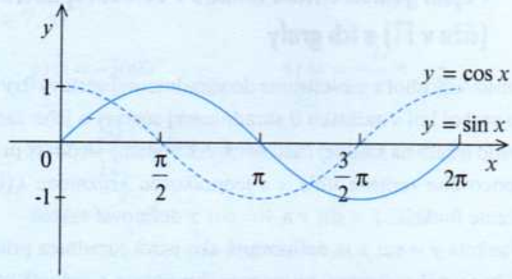
KVADRANT	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
I.	+	+	+	+
II.	+	−	−	−
III.	−	−	+	+
IV.	−	+	−	−

Číslo x nazývame niekedy aj **ARGUMENT FUNKCIE**.

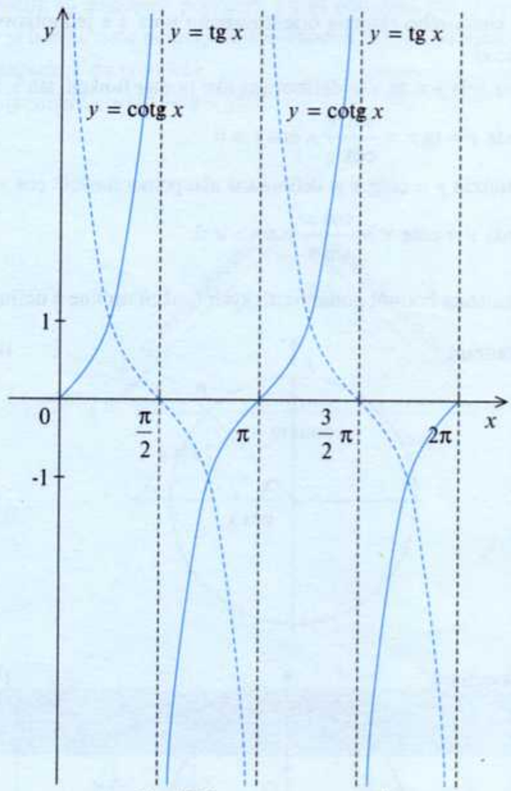
Tabuľka význačných hodnôt goniometrických funkcií pre $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$:

x		$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
0°	0	0	1	0	n. d.
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	n. d.	0
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
180°	π	0	-1	0	n. d.
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	n. d.	0
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
360°	2π	0	1	0	n. d.

Grafy goniometrických funkcií $\sin x$, $\cos x$ pre $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$:



Grafy goniometrických funkcií $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ pre $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$:



n. d. znamená, že funkcia nie je pre danú hodnotu definovaná.

Vlastnosti goniometrických funkcií

Tabuľka vlastností jednotlivých goniometrických funkcií:

VLASTNOSŤ	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \mathrm{tg}\, x$	$y = \mathrm{cotg}\, x$
obor definície	$D(f) = R$	$D(f) = R$	$D(f) = R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$, $k \in Z$	$D(f) = R - \{k\pi\}$, $k \in Z$
obor hodnôt	$H(f) = \langle -1, 1 \rangle$	$H(f) = \langle -1, 1 \rangle$	$H(f) = R$	$H(f) = R$
párnosť alebo nepárnosť	nepárna $\sin(-x) = -\sin x$	párna $\cos(-x) = \cos x$	nepárna $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$	nepárna $\mathrm{cotg}(-x) = -\mathrm{cotg}\, x$
ohraničenosť	ohraničená na $D(f)$	ohraničená na $D(f)$	nie je ohraničená zhora ani zdola	nie je ohraničená zhora ani zdola
maximum	v bodoch v tvare $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$	v bodoch v tvare $x = 2k\pi$, $k \in Z$	neexistuje	neexistuje
minimum	v bodoch v tvare $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$	v bodoch v tvare $x = \pi + 2k\pi$, $k \in Z$	neexistuje	neexistuje
periodickosť	základná perióda 2π $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$, $k \in Z$	základná perióda 2π $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$, $k \in Z$	základná perióda π $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}(x + k\pi)$, $k \in Z$	základná perióda π $\mathrm{cotg}\, x = \mathrm{cotg}(x + k\pi)$, $k \in Z$

Vzťahy medzi goniometrickými funkciami

Číslo $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ je DOPLNKOVÝM ARGUMENTOM (uhlom) k číslu x.

Pre všetky reálne čísla x a $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ platí:

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $\qquad$ $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $\qquad$ $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $\qquad$ $\mathrm{cotg}\, x = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Pre všetky prípustné hodnoty $x \in R$ platia

VZŤAHY MEDZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCIAMI S ROVNAKÝM ARGUMENTOM:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad$ $\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{cotg}\, x = 1$ $\qquad$ $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad$ $\mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$

Pre všetky prípustné hodnoty $x, y \in R$ platia

VZŤAHY PRE GONIOMETRICKÉ FUNKCIE SÚČTU A ROZDIELU ARGUMENTOV:

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

$$\mathrm{tg}(x \pm y) = \frac{\mathrm{tg}\, x \pm \mathrm{tg}\, y}{1 \mp \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{tg}\, y}$$

$$\mathrm{cotg}(x \pm y) = \frac{\mathrm{cotg}\, x \cdot \mathrm{cotg}\, y \mp 1}{\mathrm{cotg}\, x \pm \mathrm{cotg}\, y}$$

Pre všetky prípustné hodnoty x platia

VZŤAHY PRE GONIOMETRICKÉ FUNKCIE DVOJNÁSOBNÉHO ARGUMENTU:

$\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x$	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$	$\operatorname{cotg} 2x = \dfrac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2\cdot\operatorname{cotg} x}$

Pre všetky prípustné hodnoty x platia

VZŤAHY PRE GONIOMETRICKÉ FUNKCIE POLOVIČNÉHO ARGUMENTU:

$\left\lvert\sin\dfrac{x}{2}\right\rvert = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$	$\left\lvert\cos\dfrac{x}{2}\right\rvert = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$
$\left\lvert\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right\rvert = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$	$\left\lvert\operatorname{cotg}\dfrac{x}{2}\right\rvert = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Pre všetky prípustné hodnoty x a y platia

VZŤAHY PRE SÚČET A ROZDIEL GONIOMETRICKÝCH FUNKCIÍ:

$\sin x + \sin y = 2\cdot\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}$	$\sin x - \sin y = 2\cdot\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\sin\dfrac{x-y}{2}$
$\cos x + \cos y = 2\cdot\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}$	$\cos x - \cos y = -2\cdot\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\sin\dfrac{x-y}{2}$
$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cdot\cos y}$	$\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y = \pm\dfrac{\sin(x\pm y)}{\sin x\cdot\sin y}$

Pr. 2

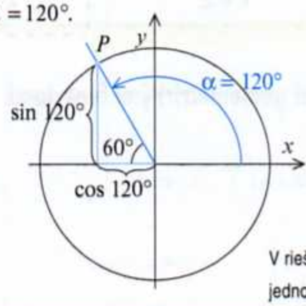
Urči hodnoty goniometrických funkcií s argumentom $\alpha = 120°$.

$\sin 120° = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120° = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$

$\operatorname{tg} 120° = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$

$\operatorname{cotg} 120° = -\operatorname{cotg} 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



V riešení sme použili jednotkovú kružnicu.

Pr. 3

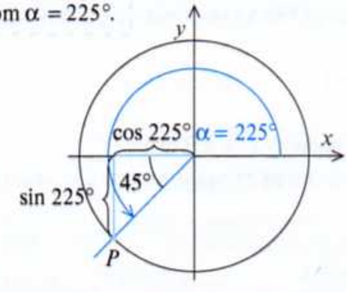
Urči hodnoty goniometrických funkcií s argumentom $\alpha = 225°$.

$\sin 225° = -\sin 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 225° = -\cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{tg} 225° = \operatorname{tg} 45° = 1$

$\operatorname{cotg} 225° = \operatorname{cotg} 45° = 1$



Pr. 4

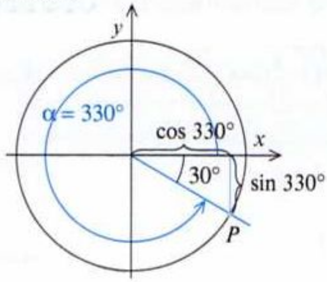
Urči hodnoty goniometrických funkcií s argumentom $\alpha = 330°$.

$\sin 330° = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$

$\cos 330° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{tg}\, 330° = -\mathrm{tg}\, 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\mathrm{cotg}\, 330° = -\mathrm{cotg}\, 30° = -\sqrt{3}$



V týchto jednoduchých príkladoch sme prebrali situácie v jednotlivých kvadrantoch (II., III., IV.). Úplne rovnako sa určujú hodnoty goniometrických funkcií pre iné argumenty, dokonca aj v oblúkovej miere.

Pr. 5

Načrtni graf funkcie f: $y = \sin 2x$, pričom $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

$y = 0$: $\sin 2x = 0$

$2x = 0 + k\pi$

$x = k\frac{\pi}{2}$

Určíme priesečníky grafu funkcie f s osou x. Pre $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ vyhovujú hodnoty $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$, $x_4 = \frac{3}{2}\pi$, $x_5 = 2\pi$.

$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

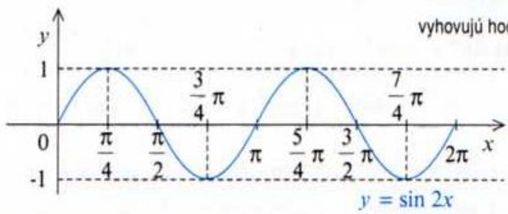
$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Určíme maximá funkcie f. Pre $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ vyhovujú hodnoty $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{5}{4}\pi$.

$2x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$

Určíme minimá funkcie f. Pre $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ vyhovujú hodnoty $x_1 = \frac{3}{4}\pi$, $x_2 = \frac{7}{4}\pi$.



Pr. 6

Načrtni graf funkcie f: $y = \sin\frac{x}{2}$ pričom $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

$y = 0$: $\sin\frac{x}{2} = 0$

$\frac{x}{2} = 0 + k\pi$

$x = 2k\pi$

Určíme priesečníky grafu funkcie f s osou x.

Pre $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ vyhovujú hodnoty $x_1 = 0$, $x_2 = 2\pi$.

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

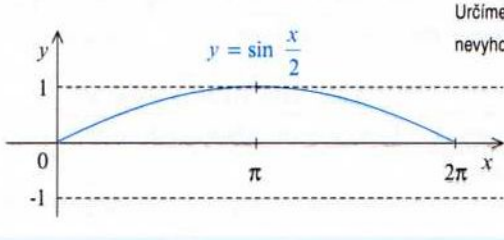
$x = \pi + 4k\pi$

Určíme maximá funkcie f. Pre $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ vyhovuje hodnota $x_1 = \pi$.

$\frac{x}{2} = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

$x = 3\pi + 4k\pi$

Určíme minimá funkcie f. Pre $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ nevyhovuje žiadna hodnota.



Pr. 7

Urči hodnoty ostatných goniometrických funkcií s argumentom α, ak sa $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$ — Využili sme vzťah $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$.

$\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \pm\frac{3}{4}$ — Využili sme vzťah $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

$\operatorname{cotg}\alpha = \pm\frac{4}{3}$ — Využili sme vzťah $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Znamienka hodnôt by sme jednoznačne určili podľa kvadrantu, do ktorého patrí $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Pr. 8

Vyjadri funkciami s argumentom x výraz $\frac{\sin x + \sin 2x}{1+\cos x + \cos 2x}$.

$$\frac{\sin x + \sin 2x}{1+\cos x+\cos 2x} = \frac{\sin x + 2\sin x\cos x}{1+\cos x+\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\sin x(1+2\cos x)}{\cos x + 2\cos^2 x} = \frac{\sin x(1+2\cos x)}{\cos x(1+2\cos x)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

Podmienky: $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$, $1+2\cos x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow x \neq \pm\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi$, kde $k \in Z$

Pr. 9

Vyjadri funkciami s argumentom x výraz $\sin 3x$.

$$\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x\cdot\cos x + \cos 2x\cdot\sin x = 2\sin x\cdot\cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\cdot\sin x =$$
$$= 2\sin x\cos^2 x + \sin x\cos^2 x - \sin^3 x = 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x$$

Pr. 10

Zjednoduš výraz: **a)** $\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x$ **b)** $\frac{1-\cos 2x + \sin 2x}{1+\cos 2x + \sin 2x}$

a) $\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)\cdot(\sin^2 x - \cos^2 x) + \cos^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x + \cos^2 x =$
$= \sin^2 x$

b) $$\frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x} = \frac{1-(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\sin x\cos x}{1+(\cos^2 x-\sin^2 x)+2\sin x\cos x} = \frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x-\sin^2 x+2\sin x\cos x} =$$
$$= \frac{2\sin^2 x + 2\sin x\cos x}{2\cos^2 x + 2\sin x\cos x} = \frac{2\sin x(\sin x+\cos x)}{2\cos x(\cos x+\sin x)} = \operatorname{tg} x$$

Podmienky: $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $x \neq (4k-1)\frac{\pi}{4}$, kde $k \in Z$

Pr. 11

Dokáž, že platí $\frac{\operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} = \sin 2x$.

$$Ľ = \frac{\operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} = \frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}}{\frac{2\sin x\cos^2 x - \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)}} =$$
$$= \frac{\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}}{\frac{2\sin x\cos^2 x - \sin x\cos^2 x + \sin^3 x}{\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)}} = \frac{2\sin^2 x\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)}{(\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x(\cos^2 + \sin^2 x)} = 2\sin x\cos x = \sin 2x$$

$P = \sin 2x$, $Ľ = P$

Podmienky: $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$, kde $k \in Z$

Goniometrické rovnice a nerovnice

Rovnice a nerovnice, ktoré obsahujú neznámu alebo výraz s neznámou v argumente goniometrických funkcií, sa nazývajú GONIOMETRICKÉ ROVNICE A NEROVNICE.

Pri riešení goniometrických rovníc a nerovníc si môžeme pomôcť jednotkovou kružnicou alebo grafom príslušnej goniometrickej funkcie.

Základné goniometrické rovnice

Základnými goniometrickými rovnicami nazývame rovnice:

$\sin x = a$ $\qquad$ $\cos x = a$ $\qquad$ $\operatorname{tg} x = a$ $\qquad$ $\operatorname{cotg} x = a$

pričom $a \in \mathrm{R}$. Rovnice $\sin x = a$ a $\cos x = a$ majú riešenie len vtedy, keď $a \in \langle -1, 1 \rangle$.

Pr. 12

Rieš v R rovnicu: $\sin x = \frac{1}{2}$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$
$$\mathrm{K} = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi; k \in \mathrm{Z} \right\}$$

Využili sme tabuľku význačných hodnôt goniometrických funkcií a poznatky o ich vlastnostiach.

Pr. 13

Rieš v R rovnicu: $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin x' = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x' = \frac{\pi}{4}$$

Použijeme pomocný uhol z I. kvadrantu.

$$x_1 = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$$
$$x_2 = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$$

Využili sme poznatok o hodnotách funkcie $\sin x$, ktoré sú záporné v III. a IV. kvadrante.

$$\mathrm{K} = \left\{ \frac{5}{4}\pi + 2k\pi, \frac{7}{4}\pi + 2k\pi; k \in \mathrm{Z} \right\}$$

Pr. 14

Rieš v R rovnicu: $\operatorname{tg} x = 1$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$
$$\mathrm{K} = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathrm{Z} \right\}$$

Pr. 15

Rieš v R rovnicu: $\operatorname{tg} x = -1$

$$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$$
$$\mathrm{K} = \left\{ \frac{3}{4}\pi + k\pi; k \in \mathrm{Z} \right\}$$

Ostatné typy goniometrických rovníc

Pri ich riešení využívame vzťahy medzi goniometrickými funkciami, úpravu rovnice na súčinový tvar alebo vhodnú substitúciu s cieľom upraviť ich až na základný tvar.

Pr. 16

Rieš v R rovnicu: $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

$$\sin 2x = -\frac{1}{2}$$

Substitúcia: $2x = a \Rightarrow x = \frac{a}{2}$

$$\sin a = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a_1 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \wedge a_2 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$$
$$x_1 = \frac{7}{12}\pi + k\pi, x_2 = \frac{11}{12}\pi + k\pi$$
$$\mathrm{K} = \left\{ \frac{7}{12}\pi + k\pi, \frac{11}{12}\pi + k\pi; k \in \mathrm{Z} \right\}$$

Pr. 17

Rieš v R rovnicu: $\cos(3x-60°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos(3x-60°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Substitúcia: $3x-60°=a$.

$\cos a=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a_1=45°+k\cdot 360° \quad \wedge \quad a_2=315°+k\cdot 360°$

Dosadíme naspäť do substitúcie za a.

$3x_1-60°=45°+k\cdot 360° \qquad 3x_2-60°=315°+k\cdot 360°$

$x_1=35°+k\cdot 120° \qquad x_2=125°+k\cdot 120°$

$K=\{35°+k\cdot 120°, 125°+k\cdot 120°;\ k\in Z\}$

Pr. 18

Rieš v R rovnicu: $2\sin^2 x-\cos^2 x-4\sin x+2=0$

Rovnicu upravíme na tvar, v ktorom sa vyskytuje len jediná goniometrická funkcia. Využijeme vzťah $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ $\Rightarrow \cos^2 x=1-\sin^2 x$.

$2\sin^2 x-1+\sin^2 x-4\sin x+2=0$

$3\sin^2 x-4\sin x+1=0$

Substitúcia: $\sin x=a$.

$3a^2-4a+1=0$

Dosadíme naspäť do substitúcie za a.

$a_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{4\pm 2}{6}\Rightarrow a_1=1\wedge a_2=\frac{1}{3}$

$\sin x_1=1 \qquad \sin x_2=\frac{1}{3}$

$x_1=90°+k\cdot 360° \qquad x_2 \doteq 19°28'+k\cdot 360°,\ x_3\doteq 160°32'+k\cdot 360°$

$K=\{90°+k\cdot 360°, 19°28'+k\cdot 360°, 160°32'+k\cdot 360°;\ k\in Z\}$

Pr. 19

Rieš v R rovnicu: $\cos 2x=2\sin x$

Rovnicu upravíme na tvar, v ktorom sa vyskytuje len jednoduchý argument. Využijeme pritom vzťah $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$. Využijeme vzťah $\cos^2 x=1-\sin^2 x$.

$\cos^2 x-\sin^2 x=2\sin x$

$1-\sin^2 x-\sin^2 x=2\sin x$

$2\sin^2 x+2\sin x-1=0$

Substitúcia: $\sin x=a$.

$2a^2+2a-1=0$

$a_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{4}=\frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

Dosadíme naspäť do substitúcie za a.

$\sin x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\doteq 0{,}3660$

$x_1\doteq 21°28'+k\cdot 360°,\ x_2\doteq 158°32'+k\cdot 360°$

$\sin x=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\doteq -1{,}3660<-1$

Nemá riešenie, lebo musí platiť: $\sin x\in\langle -1;1\rangle$.

$K=\{21°28'+k\cdot 360°, 158°32'+k\cdot 360°;\ k\in Z\}$

Pr. 20

Rieš v R rovnicu: $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$

$$(\sin 2x+\sin x)+(\sin 4x+\sin 3x)=0$$

Použijeme vzťah $\sin a+\sin b=2\cdot\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$.

$$2\sin\frac{2x+x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{4x+3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{7x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=0$$

Na ľavej strane rovnice vyjmeme pred zátvorku výraz $\cos\frac{x}{2}$.

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\left(\sin\frac{3x}{2}+\sin\frac{7x}{2}\right)=0$$

Použijeme opäť vzťah $\sin a+\sin b=2\cdot\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$.

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos x=0 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}=0\vee\sin\frac{5x}{2}=0\vee\cos x=0$$

I. $\frac{x_1}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$x_1=\pi+2k\pi=\pi(2k+1)$

II. $\frac{5x_2}{2}=k\pi$

$x_2=\frac{2}{5}k\pi$

III. $x_3=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$x_3=\frac{\pi}{2}(2k+1)$

$K=\left\{\pi(2k+1),\frac{2}{5}k\pi,\frac{\pi}{2}(2k+1);k\in Z\right\}$

Pr. 21

Rieš v R rovnicu: $8\sin x+6\cos x=9$

$8\sin x+6\cos x=9$

$8u+6v=9$

Substitúcia: $\sin x=u$, $\cos x=v$.

Platí vzťah $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, ktorý pomocou substitúcie prepíšeme do podoby $u^2+v^2=1$.

Riešime sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi.

Dosadíme za u do rovnice ①.

$$8u+6v=9 \quad\Rightarrow u=\frac{9-6v}{8}$$

$$u^2+v^2=1 \quad ①$$

$$\left(\frac{9-6v}{8}\right)^2+v^2=1$$

$$100v^2-108v+17=0$$

$$v_{1,2}=\frac{108\pm\sqrt{108^2-4\cdot100\cdot17}}{200}\Rightarrow v_1\doteq 0{,}8887,\ v_2\doteq 0{,}1913$$

Dosadíme za v do substitúcie.

$\cos x_1\doteq 0{,}8887$

$x_1=27°17'+k\cdot360°,\ x_3=332°43'+k\cdot360°$

$\cos x_2\doteq 0{,}1913$

$x_2=78°58'+k\cdot360°,\ x_4=281°2'+k\cdot360°$

Pretože úpravy nie sú ekvivalentné, treba urobiť skúšku.

Keďže korene x_3 a x_4 nevyhovujú, bude $K=\{27°17'+k\cdot360°,\ 78°58'+k\cdot360°;\ k\in Z\}$

Riešenie pravouhlého trojuholníka

Úlohu, v ktorej máme z daných prvkov trojuholníka ABC určiť všetky jeho základné prvky, ktoré nie sú dané (prípadne aj ďalšie), nazývame **RIEŠENIE TROJUHOLNÍKA**. Potrebné vzťahy na riešenie pravouhlého trojuholníka sú v kapitole planimetria. V tejto kapitole využijeme len definíciu goniometrických funkcií v pravouhlom trojuholníku.

Riešenie všeobecného trojuholníka

Zameriame sa teraz na numerické riešenie trojuholníka s využitím goniometrických funkcií. Metódy riešenia trojuholníka, využívajúce goniometrické funkcie, tvoria tzv. **TRIGONOMETRIU**. Základnými vetami tejto teórie sú sínusová a kosínusová veta. V ďalšom texte budeme používať tieto bežné označenia:

$\Delta\ ABC$ - trojuholník ABC

A, B, C - vrcholy $\Delta\ ABC$

a, b, c - strany $\Delta\ ABC$

α, β, γ - vnútorné uhly $\Delta\ ABC$

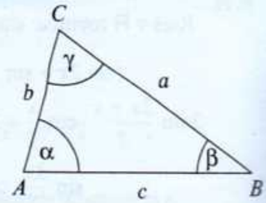
r - polomer kružnice opísanej $\Delta\ ABC$

ρ - polomer kružnice vpísanej do $\Delta\ ABC$

S - obsah $\Delta\ ABC$

o - obvod $\Delta\ ABC$

$s = \frac{o}{2}$ - polovičný obvod $\Delta\ ABC$



Všetky nasledujúce vzťahy sa vyskytujú v troch tvaroch, pričom druhé dva sa získajú analogicky z prvého tzv. cyklickou zámenou strán, prípadne uhlov.

SÍNUSOVÁ VETA: Pomer dĺžok dvoch strán $\Delta\ ABC$ sa rovná pomeru sínusov uhlov, ktoré sú k týmto stranám protiľahlé.

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \qquad \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

Iný zápis sínusovej vety: $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

KOSÍNUSOVÁ VETA: Druhá mocnina dĺžky strany $\Delta\ ABC$ sa rovná súčtu druhých mocnín zvyšných dvoch strán zmenšenému o dvojnásobok súčinu dĺžok týchto strán a kosínusu uhla nimi zovretého.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

TANGENSOVÁ VETA: V každom $\Delta\ ABC$ platí:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}} \qquad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}} \qquad \frac{c-a}{c+a} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}}$$

O veľkosti polomeru r kružnice opísanej $\Delta\ ABC$ platí:

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}$$

O veľkosti polomeru ρ kružnice vpísanej do $\Delta\ ABC$ platí:

$$\rho = (s-a)\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = (s-b)\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = (s-c)\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

s je polovičný obvod trojuholníka ABC a platí preň: $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Pre obsah $\Delta\ ABC$ platí:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta \qquad S = \frac{abc}{4r} \qquad S = \rho\cdot s$$

Pre vnútorné uhly α, β, γ trojuholníka ABC platí:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \qquad \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}} \qquad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

Pr. 22

Rieš $\Delta\ ABC$, ak : $a = 47{,}77$ cm, $\alpha = 43°$, $\gamma = 96°30'$. Urči aj jeho obsah.

$\beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - (43° + 96°30') = 40°30'$

V riešení môžeme použiť sínusovú vetu, pretože trojuholník je určený stranou a dvoma uhlami. Vypočítame uhol β.

$\frac{b}{a}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \Rightarrow b=a\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=47{,}77\cdot\frac{\sin 40°30'}{\sin 43°}\doteq 45{,}49$ cm

Vypočítame dĺžku strany *b*.

$\frac{c}{a}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \Rightarrow c=a\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=47{,}77\cdot\frac{\sin 96°30'}{\sin 43°}\doteq 69{,}59$ cm

Vypočítame dĺžku strany *c*.

$S=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot 47{,}77\cdot 69{,}90\cdot\sin 40°30'\doteq 1\,079\ \text{cm}^2$

Vypočítame obsah trojuholníka.

Uhol β má veľkosť $40°30'$, zvyšné strany trojuholníka majú dĺžku 45,49 cm a 69,90 cm. Trojuholník má obsah 1 079 cm^2.

Pr. 23

Rieš $\Delta\, ABC$, ak: $a = 32{,}5$ cm, $b = 58{,}4$ cm, $c = 72{,}6$ cm. Urči aj jeho obsah.

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$

$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{58{,}4^2+72{,}6^2-32{,}5^2}{2\cdot 58{,}4\cdot 72{,}6}\Rightarrow\alpha\doteq 25°57'$

V riešení použijeme kosínusovú vetu, lebo $\Delta\, ABC$ je určený troma stranami.

$\frac{b}{a}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$

$\sin\beta=\frac{b}{a}\cdot\sin\alpha=\frac{58{,}4\cdot\sin 25°57'}{32{,}5}\Rightarrow\beta_1\doteq 51°50'$

$\beta_2\doteq 128°10'$

Ďalšie uhly môžeme určiť pomocou kosínusovej vety alebo pomocou sínusovej vety.

$\gamma_1=180°-(25°57'+51°50')=180°-77°47'=102°13'$

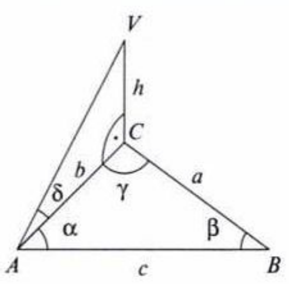
$\gamma_2=180°-(25°57'+128°10')=25°53'$

$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}\cdot 32{,}5\cdot 58{,}4\cdot\sin 102°13'\doteq 927{,}5\ \text{cm}^2$

Trojuholník má obsah 927,5 cm^2.

Pr. 24

Päta veže a miest *A* a *B*, odkiaľ vežu pozorujeme, sú vrcholmi trojuholníka, v ktorom $|AB|=c=80$ m, $|\sphericalangle CAB|=\alpha=60°$, $|\sphericalangle ABC|=\beta=38°13'$. Urči výšku veže, ak vieš, že z miesta *A* vidno vrchol veže pod výškovým uhlom $\delta=50°12'$.



$\frac{h}{b}=\text{tg}\,\delta\Rightarrow h=b\cdot\text{tg}\,\delta$

Z Δ *ACV* určíme výšku veže *h*.

$\frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{\sin\beta}{\sin[180°-(\alpha+\beta)]}=$

$=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\Rightarrow b=c\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

Z Δ *ABC* určíme pomocou sínusovej vety stranu *b*.

$h=b\cdot\text{tg}\,\delta=\frac{c\sin\beta\ \text{tg}\,\delta}{\sin(\alpha+\beta)}=$

$=\frac{80\cdot\sin 38°13'\cdot\text{tg}\,50°12'}{\sin 98°13'}\doteq 60$ m

Dosadíme za *b* do vzťahu pre *h*.

Výška veže je asi 60 m.

20. Základné poznatky o postupnostiach

Obsah kapitoly:

- Definícia postupnosti
- Vlastnosti postupností
- Vyjadrenie postupnosti

Definícia postupnosti

POSTUPNOSŤ je funkcia, ktorej oborom definície je množina prirodzených čísel N.

Postupnosť sa nazýva **NEKONEČNÁ**, ak je jej oborom definície celá množina N. Postupnosť sa nazýva **KONEČNÁ**, ak je jej oborom definície množina prvých n prirodzených čísel $\{1; 2; 3...; n\}$.

Funkčné hodnoty postupnosti sa nazývajú **ČLENY POSTUPNOSTI**; funkčná hodnota postupnosti v bode $n \in \mathrm{N}$ sa nazýva **n-TÝ ČLEN POSTUPNOSTI** a označuje sa a_n.

Postupnosť (nekonečnú) zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ alebo $\{a_1, a_2 ..., a_n ...\}$. Konečnú postupnosť zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{k}$ alebo $\{a_1, a_2 ..., a_k\}$.

Pod pojmom postupnosť budeme vždy rozumieť nekonečnú postupnosť, pokiaľ nie je výslovne uvedené, že ide o konečnú postupnosť.

Postupnosť všetkých párnych prirodzených čísel zapisujeme $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$ alebo $\{2, 4..., 2n...\}$. Postupnosť všetkých nepárnych prirodzených čísel zapisujeme $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$ alebo $\{1, 3..., 2n-1...\}$.

Postupnosť $\{3n\}_{n=1}^{\infty}$ priraďuje číslu $n=1$ číslo $a_1 = 3$, číslu $n=2$ číslo $a_2 = 6$, číslu $n=3$ číslo $a_3 = 9$, všeobecne číslu n číslo $a_n = 3n$.

Vlastnosti postupností

- Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **RASTÚCA**, ak je $a_{n+1} > a_n$ pre každé $n \in \mathrm{N}$.
- Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **KLESAJÚCA**, ak je $a_{n+1} < a_n$ pre každé $n \in \mathrm{N}$.
- Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **NEKLESAJÚCA**, ak je $a_{n+1} \geq a_n$ pre každé $n \in \mathrm{N}$.
- Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **NERASTÚCA**, ak je $a_{n+1} \leq a_n$ pre každé $n \in \mathrm{N}$.

- Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **ZHORA OHRANIČENÁ**, ak existuje také reálne číslo h, že $a_n \leq h$ pre každé $n \in \mathrm{N}$.
- Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **ZDOLA OHRANIČENÁ**, ak existuje také reálne číslo d, že $a_n \geq d$ pre každé $n \in \mathrm{N}$.
- Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **OHRANIČENÁ**, ak je ohraničená zhora i zdola.

Rastúce, klesajúce, neklesajúce a nerastúce postupnosti voláme **MONOTÓNNE POSTUPNOSTI**.
Rastúce a klesajúce postupnosti voláme **RÝDZO MONOTÓNNE POSTUPNOSTI**.

Pr. 1

Urč vlastnosti postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n}{5}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\left\{\frac{n}{5}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5} ...\right\}$$

Určíme niekoľko prvých členov postupnosti. Ľahko zbadáme, že postupnosť je ohraničená zdola $\left(d = \frac{1}{5}\right)$, lebo každý člen postupnosti je väčší alebo sa rovná číslu $\frac{1}{5}$.

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{5}-\frac{n}{5}=\frac{n}{5}+\frac{1}{5}-\frac{n}{5}=\frac{1}{5}>0$$

Vypočítame rozdiel dvoch po sebe idúcich členov. Vidíme, že tento rozdiel je kladné číslo, teda postupnosť je rastúca. Pretože každý nasledujúci člen je o $\frac{1}{5}$ väčší ako predchádzajúci, nie je postupnosť zhora ohraničená (čiže nie je ani ohraničená), ale je rýdzo monotónna.

Postupnosť je zdola ohraničená, nie je zhora ohraničená, je rastúca a teda rýdzo monotónna.

Vyjadrenie postupnosti

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ môžeme určiť niekoľkými spôsobmi.

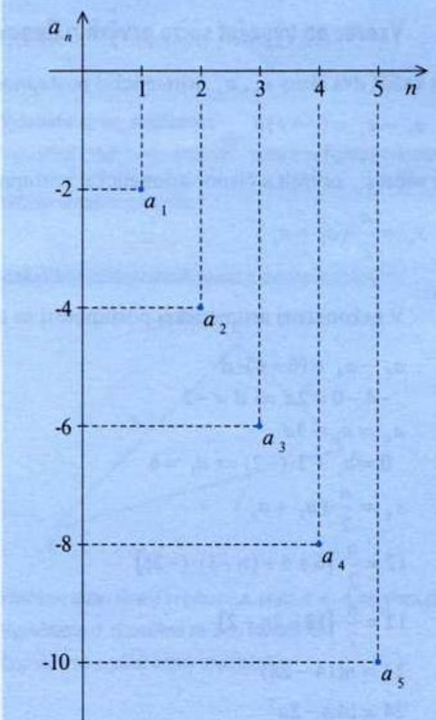
- Ak je postupnosť určená všeobecným vzorcom, ktorý číslu n priradí číslo a_n, teda číslu 1 priradí člen a_1, číslu 2 člen a_2, číslu 3 člen a_3..., hovoríme, že postupnosť je určená VZORCOM PRE n-tý člen.
- Ak je postupnosť určená pomocou prvého člena (alebo niekoľkých prvých členov) a vzorcom, pomocou ktorého môžeme postupne určiť ďalšie členy, hovoríme, že postupnosť je určená REKURENTNE.
- Ak je postupnosť určená pomocou niekoľkých prvých členov, hovoríme, že postupnosť je určená VYMENOVANÍM PRVKOV. Z naznačenia niekoľkých prvých členov však musí byť zrejmé, aké hodnoty budú nadobúdať ďalšie členy.
- Postupnosť je určená GRAFICKY, ak poznáme jej graf. Grafom postupnosti je vždy množina navzájom izolovaných bodov. Postupnosť môžeme znázorniť graficky v rovinnej sústave súradníc alebo na priamke.

Príklad postupnosti určenej vzorcom pre n-tý člen: $a_n=\dfrac{n}{n+1}$.

Príklad postupnosti určenej rekurentne: $a_1=6,\ a_{n+1}=a_n-3$.

Príklad postupnosti určenej vymenovaním prvkov: $\{1, 4, 7, 10, 13, 16...\}$.

Príklad postupnosti určenej graficky:



21. Aritmetická postupnosť

Obsah kapitoly:

- Definícia aritmetickej postupnosti
- Vzorec na výpočet súčtu prvých n členov
- Riešené príklady

Definícia aritmetickej postupnosti

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva ARITMETICKÁ, ak existuje také číslo d, že pre každé prirodzené číslo n platí $a_{n+1} = a_n + d$. Číslo d sa nazýva DIFERENCIA.

Medzi prvým a ľubovoľným členom každej aritmetickej postupnosti platí vzťah $a_n = a_1 + (n-1)d$.
Medzi dvoma ľubovoľnými členmi každej aritmetickej postupnosti platí vzťah $a_r = a_s + (r-s)d$.
Oba uvedené vzťahy sa dajú ľahko dokázať matematickou indukciou.

Pr. 1

Dokáž, že postupnosť $\left\{\frac{2n-1}{3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická postupnosť.

$$a_n = \frac{2n-1}{3}$$

Určíme n-tý člen postupnosti

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{3} = \frac{2n+2-1}{3} = \frac{2n+1}{3}$$

Určíme $(n+1)$-vý člen postupnosti.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+1}{3} - \frac{2n-1}{3} = \frac{2n+1-2n+1}{3} = \frac{2}{3}$$

Vypočítame rozdiel $(n+1)$-vého a n-tého člena postupnosti.

Číslo $\frac{2}{3} = d$, postupnosť je teda aritmetická.

Vzorec na výpočet súčtu prvých n členov

Pre každé dva členy a_r, a_s aritmetickej postupnosti platí:

$$a_r - a_s = (r-s)d$$

Pre súčet s_n prvých n členov aritmetickej postupnosti platí:

$$s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)$$

Uvedená veta sa dá ľahko dokázať matematickou indukciou.

Pr. 2

V nekonečnej aritmetickej postupnosti sa $a_4 = 0$, $a_6 = -4$. Urči počet sčítaných členov n, ak $s_n = 12$.

$$a_6 - a_4 = (6-4)\cdot d$$
$$-4 - 0 = 2d \Rightarrow d = -2$$

Vypočítame diferenciu d.

$$a_4 = a_1 + 3d$$
$$0 = a_1 + 3\cdot(-2) \Rightarrow a_1 = 6$$

Vypočítame prvý člen a_1.

$$s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)$$
$$12 = \frac{n}{2}\cdot[6+6+(n-1)\cdot(-2)]$$
$$12 = \frac{n}{2}\cdot[12-2n+2]$$
$$24 = n(14-2n)$$
$$24 = 14n - 2n^2$$

Vypočítame počet sčítaných členov n, využijeme pritom vzťah $a_n = a_1 + (n-1)d = 6 + (n-1)(-2)$.

$$2n^2 - 14n + 24 = 0 \qquad / : 2$$
$$n^2 - 7n + 12 = 0$$
$$(n-3)\cdot(n-4) = 0 \Rightarrow n_1 = 3, n_2 = 4$$

V tejto aritmetickej postupnosti sme sčítali buď 3, alebo 4 členy.

Riešené príklady

V niekoľkých nasledujúcich príkladoch ukážeme presný význam a použitie pojmov a vzťahov definovaných v tejto kapitole. Praktické využitie týchto poznatkov nájdete v kapitole č. 23.

Pr. 3

Súčin troch po sebe idúcich členov aritmetickej postupnosti sa rovná ich súčtu.

Urči tieto členy, ak vieš, že $d = \frac{13}{3}$.

$$a_{n-1} \cdot a_n \cdot a_{n+1} = a_{n-1} + a_n + a_{n+1}$$
$$a_n = x, a_{n-1} = x - d, a_{n+1} = x + d$$
$$(x-d)\cdot x \cdot (x+d) = (x-d) + x + (x+d)$$
$$(x^2 - d^2)x = 3x \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x^2 - d^2 = 3$$
$$x^2 - \frac{169}{9} = 3$$
$$x^2 = \frac{196}{9} \Rightarrow x_{2,3} = \pm\frac{14}{3}$$

Text úlohy zapíšeme matematickými symbolmi.
Určíme tri po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti a dosadíme ich do symbolického zápisu úlohy.

Úloha má tri riešenia. Členmi aritmetickej postupnosti môžu byť čísla $-\frac{13}{3}, 0, \frac{13}{3}$ alebo $\frac{1}{3}, \frac{14}{3}, 9$ i $-9, -\frac{14}{3}, -\frac{1}{3}$.

Pr. 4

Dĺžky strán pravouhlého trojuholníka tvoria tri po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti. Urči ich, ak vieš, že trojuholník má obsah 6 dm^2?

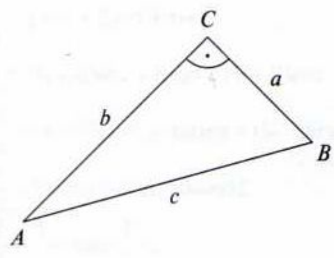
$$a, b = a - d, c = a + d$$
Vyjadríme strany trojuholníka.

$$(a+d)^2 = a^2 + (a-d)^2$$
Vyjadríme vzťah medzi stranami - pomocou Pytagorovej vety.

$$S = \frac{a(a-d)}{2}$$
Určíme obsah trojuholníka.

$$a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + a^2 - 2ad + d^2$$
$$6 = \frac{a(a-d)}{2}$$
Získali sme sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi.

$$4ad = a^2 \quad ①$$
$$12 = a^2 - ad$$
$$ad = \frac{a^2}{4}$$
$$12 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow 48 = 3a^2$$
$$a^2 = 16$$



$$a = 4$$
Hľadáme dĺžku strany trojuholníka, preto $a = -4$ nevyhovuje.

$$16d = 16 \Rightarrow d = 1$$
Vypočítame d, dosadíme za a do rovnice ①.

$$b = 4 - 1 = 3, c = 4 + 1 = 5$$
Dopočítame zvyšné strany trojuholníka.

Trojuholník má strany $a = 4$ dm, $b = 3$ dm, $c = 5$ dm.

Pr. 5

Veľkosti strán pravouhlého trojuholníka tvoria tri po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti. Urči ich, ak vieš, že polomer kružnice vpísanej do trojuholníka je $\rho = 7$ cm.

$b,\ a = b - d,\ c = b + d$ — Vyjadríme strany trojuholníka pomocou d.

$(b+d)^2 = b^2 + (b-d)^2$ — Vyjadríme vzťah medzi stranami – pomocou Pytagorovej vety.

$\rho = \dfrac{a+b-c}{2}$ — Zapíšeme vzťah pre polomer kružnice vpísanej do pravouhlého trojuholníka (je uvedený v kapitole č. 25).

$7 = \dfrac{(b-d)+b-(b+d)}{2}$

$14 = b - 2d$

$$\begin{aligned} (b+d)^2 &= b^2 + (b-d)^2 \\ 14 &= b - 2d \end{aligned}$$

Získali sme sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi.

$$\begin{aligned} b^2 + 2bd + d^2 &= b^2 + b^2 - 2bd + d^2 \\ 14 &= b - 2d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4bd &= b^2 \quad /:b \\ 14 &= b - 2d \end{aligned}$$

Môžeme deliť stranou b, pretože $b > 0$.

$$\begin{aligned} 4d &= b \quad ① \\ 14 &= b - 2d \quad ② \end{aligned}$$

Dosadíme za b do rovnice ① a ②.

$$\begin{aligned} 14 &= 2d \\ d &= 7 \end{aligned}$$

$a = 21,\ b = 28,\ c = 35$ — Vypočítame strany trojuholníka.

Strany trojuholníka majú dĺžky 21 cm, 28 cm a 35 cm.

Pr. 6

Veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka tvoria tri po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti. Urči ich, ak vieš, že súčet ich kosínusov sa rovná $\frac{5}{4}$.

$\alpha, \beta, \gamma;\ \alpha < \beta < \gamma$ — Označíme vnútorné uhly trojuholníka.

$\alpha = \beta - d,\ \beta,\ \gamma = \beta + d$ — Vyjadríme uhly pomocou d.

$\beta - d + \beta + \beta + d = 180°$ — Využijeme vzťah $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

$\beta = 60°$

$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \dfrac{5}{4}$ — Text úlohy zapíšeme matematickými symbolmi

$\cos(\beta - d) + \cos\beta + \cos(\beta + d) = \dfrac{5}{4}$ — a dosadíme za uhly.

$\cos(60° - d) + \cos 60° + \cos(60° + d) = \dfrac{5}{4}$ — Využitím vzťahu $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$2\cos 60° \cos d + \cos 60° = \dfrac{5}{4}$ — získame $\cos(60°-d) + \cos(60°+d) = 2\cos 60° \cos d$.

$2\cdot\dfrac{1}{2}\cos d + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{4}$ — Dosadíme za $\cos 60° = \frac{1}{2}$.

$\cos d = \dfrac{3}{4} \Rightarrow d = 41°25'$

$\alpha = 60° - 41°25' = 18°35',\ \gamma = 60° + 41°25' = 101°25'$ — Dopočítame hodnoty zvyšných dvoch vnútorných uhlov.

Trojuholník má vnútorné uhly $\alpha = 18°35',\ \beta = 60°,\ \gamma = 101°25'$.

22. Geometrická postupnosť

Nekonečný geometrický rad

Obsah kapitoly:

- Definícia geometrickej postupnosti
- Vzorec na výpočet súčtu prvých n členov
- Definícia nekonečného geometrického radu
- Vzorec na súčet nekonečného geometrického radu
- Riešené príklady

Definícia geometrickej postupnosti

ostupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **GEOMETRICKÁ**, ak existuje také číslo q, e pre každé prirodzené číslo n platí $a_{n+1} = a_n . q$ $(a \neq 0, q \neq 0)$.
íslo q sa nazýva **KVOCIENT**.

ledzi prvým a ľubovoľným členom každej geometrickej postupnosti latí vzťah $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.
ledzi dvoma ľubovoľnými členmi každej geometrickej postupnosti atí vzťah $a_r = a_s \cdot q^{r-s}$.

Vzorec na výpočet súčtu prvých n členov

e súčet s_n prvých n členov geometrickej postupnosti platí:

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}, \text{ ak } q \neq 1, \quad \text{resp. } s_n = n \cdot a_1, \text{ ak } q = 1$$

Uvedená veta sa dá ľahko dokázať matematickou indukciou.

Definícia nekonečného geometrického radu

KONEČNÝ GEOMETRICKÝ RAD je výraz $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$, oréhо jednotlivé členy tvoria geometrickú postupnosť.

konečný geometrický rad môžeme zapísať aj v tvare $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Symbol $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ čítame suma (súčet) a_i od i rovnajúceho sa jednej do nekonečna.

Vzorec na súčet nekonečného geometrického radu

Nekonečný geometrický rad $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^n + ...$
e konvergentný práve vtedy, keď $|q| < 1$ a pre jeho súčet platí: $s = \frac{a_1}{1-q}$
e divergentný práve vtedy, keď $|q| \geq 1$.

Riešené príklady

iekoľkých nasledujúcich príkladoch ukážeme presný význam oužitie pojmov a vzťahov definovaných v tejto kapitole.
ktické využitie týchto poznatkov nájdete v kapitole č. 23.

Napíš prvých päť členov geometrickej postupnosti, ak $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15$ a $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 240$.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15$$
$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 240$$

Z textu úlohy dostávame sústavu 2 rovníc s 8 neznámymi.

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 = 15$$
$$a_1 q^4 + a_1 q^5 + a_1 q^6 + a_1 q^7 = 240$$

Jednotlivé členy vyjadríme pomocou vzorca $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

$$a_1 \cdot (1 + q + q^2 + q^3) = 15 \quad ①$$
$$a_1 q^4 \cdot (1 + q + q^2 + q^3) = 240$$

Získame sústavu 2 rovníc s 2 neznámymi.
Rovnice vydelíme ($a_1 \neq 0 \wedge q \neq 0$).

$$q^4 = 16$$
$$q_{1,2} = \pm 2$$

Uvažujeme len o koreňoch z R. Dosadíme za q do rovnice ①.

$$a_1 = 1,\ a_1' = -3$$

Riešením sú teda dve geometrické postupnosti.

Prvým riešením je geometrická postupnosť: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8, a_5 = 16$
druhým: $a_1 = -3, a_2 = 6, a_3 = -12, a_4 = 24, a_5 = -48$.

Pr. 2

Ak pripočítame k číslam 2, 7, 17 rovnaké číslo, vzniknú prvé tri členy geometrickej postupnosti. Urči ich.

$$a_1 = 2 + x,\ a_2 = 7 + x,\ a_3 = 17 + x$$

Vyjadríme prvé tri členy geometrickej postupnosti.

$$\frac{7+x}{2+x} = \frac{17+x}{7+x}$$

Využijeme vzťah $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, t. j. $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = q$.

Podmienky: $x \neq 2,\ x \neq -7$

$$(7+x)^2 = (17+x)\cdot(2+x)$$
$$49 + 14x + x^2 = x^2 + 19x + 34$$
$$5x = 15$$
$$x = 3$$
$$a_1 = 5,\ a_2 = 10,\ a_3 = 20$$

Dosadíme za x do vyjadrenia jednotlivých členov.

Postupnosť má členy 5, 10, 20.

Pr. 3

Urči veľkosť ostrého uhla α, ak: $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\frac{1}{\cos\alpha}$ tvoria tri po sebe idúce členy geometrickej postupnosti.

$$a_1 = \sin\alpha,\ a_2 = \operatorname{tg}\alpha,\ a_3 = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Vyjadríme jednotlivé členy postupnosti.

$$\frac{\frac{1}{\cos\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$$

Využijeme vzťah $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, tj. $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} = q$.

$$\frac{\frac{1}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sin\alpha}$$

Podmienky: $\sin\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0 + 2k\pi$, kde $k \in Z$
$\cos\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq k\pi$, kde $k \in Z$

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k\cdot\pi$$

Vyberieme uhol spĺňajúci podmienky zadania.

Uhol α má veľkosť 45°.

Pr. 4

Urči súčet radu $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \ldots$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \ldots..$$

Výraz sa skladá z dvoch radov. Vypíšeme ich.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots..$$

Prvý rad má $a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+.....$

Druhý rad má $a_1=\frac{1}{3}, q=\frac{1}{3}$.

$s_1=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1,\ s_2=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$

Určíme súčet každého radu.

$s=s_1+s_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

Súčet pôvodného radu získame sčítaním súčtov jednotlivých radov.

Rad má súčet $\frac{3}{2}$.

Pr. 5

Urči hodnotu súčinu $y=3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{3}\cdot...$

$y=3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[8]{3}\cdot...=3\cdot3^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{4}}\cdot3^{\frac{1}{8}}\cdot...=3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...}=3^s$

$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.....=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

Je to vlastne súčet nekonečného geometrického radu, $a_1=1, q=\frac{1}{2}$.

Využijeme vzťah $s=\frac{a_1}{1-q}$.

$y=3^s=3^2=9$

Súčin y má hodnotu 9.

Pr. 6

Zlomok $\frac{1}{1-2x}$ môžeme považovať za súčet nekonečného geometrického radu.

Napiš tento rad a uveď podmienku pre číslo x.

$\frac{1}{1-2x}=\frac{a_1}{1-q}$

$a_1=1, q=2x$

Porovnáme zlomok so vzorcom pre súčet nekonečného geometrického radu.

$|2x|<1\Rightarrow|x|<\frac{1}{2}$

Podmienka konvergencie nekonečného geometrického radu je splnená: $|q|<1$.

Hľadaným radom je rad $1+2x+4x^2+8x^3+.....$, pričom $|x|<\frac{1}{2}$.

Pr. 7

Rieš v R rovnicu: $\log x+\log\sqrt{x}+\log\sqrt[4]{x}+\log\sqrt[8]{x}+...=2$

Podmienka: $x>0$

$\log x+\log\sqrt{x}+\log\sqrt[4]{x}+\log\sqrt[8]{x}+...=2$

Použijeme vety pre počítanie s logaritmami.

$\log x+\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{4}\log x+\frac{1}{8}\log x+...=2$

$\log x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...\right)=2$

Čísla $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...$ môžeme sčítať

$\log x\cdot2=2$

$\log x=1$

a ich súčtom je $s=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$.

$x=10$

$K=\{10\}$

23. Využitie postupností pri riešení úloh z praxe

Obsah kapitoly:

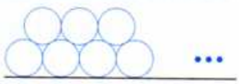
Riešené príklady

Pri riešení nasledujúcich príkladov využijeme poznatky z predchádzajúcich kapitol č. 20, 21, 22.

Pr. 1

Železné rúry sa skladujú vo vrstvách tak, že rúry každej hornej vrstvy zapadajú do medzier dolnej vrstvy. Do koľkých vrstiev uložíme 102 rúr, ak v najvrchnejšej vrstve majú byť 3 rúry? Koľko rúr bude v najspodnejšej vrstve?

$a_1 = 3$
$d = 1$



Najvrchnejšiu vrstvu môžeme považovať za a_1.
V každej nižšej vrstve je o 1 rúru viac (pozri obrázok).
a_n označuje počet rúr v najspodnejšej vrstve.
s_n označuje počet rúr vo všetkých n vrstvách.

$$a_n = 3 + (n-1) = 3 + n - 1 = n + 2$$

$$102 = \frac{n}{2} \cdot (3 + n + 2)$$

Využijeme vzorec $s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$.

$$204 = 5n + n^2$$

$$n^2 + 5n - 204 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 816}}{2} = \frac{-5 \pm 29}{2} \Rightarrow n_1 = 12,\ n_2 = -17$$

Vyhovuje len n_1, pretože počet musí byť prirodzené číslo.

$$a_{12} = 12 + 2 = 14$$

Dosadíme za n do vzťahu pre a_n.

Rúry sa uložia do 12 vrstiev, v najspodnejšej bude 14 rúr.

Pr. 2

Teplota Zeme rastie s hĺbkou o 1 °C na 33 metrov. Urči, aká je teplota na dne bane hlbokej 1 015 metrov, ak v hĺbke 25 metrov je teplota 9 °C.

$$1\,015 - 25 = 990$$

Určíme rozdiel hĺbok v metroch.

$$990 : 33 = 30$$

Na každých 33 m pribudne 1° C. Ak hĺbka klesne o 990 m, tak teplota sa zvýši o 30° C, čiže vzhľadom na teplotu 9° C v hĺbke 25 m sa zvýši na 39° C.

Na úlohu sa môžeme pozrieť tiež ako na aritmetickú postupnosť: $a_1 = 9, d = 1;\ a_{31} = a_1 + 30d = 9 + 30 = 39$.

Teplota na dne bane je 39 °C.

Pr. 3

Baktérie sa v rastovom médiu množia delením, ku ktorému dochádza vždy raz za pol hodiny. Koľko baktérií sa namnoží za 12 hodín z jednej baktérie?

$a_0 = 1$ — Určíme pôvodný počet baktérií.

$a_1 = 2$ — Určíme počet baktérií za 0,5 hodiny.

$a_2 = 4 = 2^2$ — Určíme počet baktérií za 1 hodinu.

$a_3 = 8 = 2^3$ — Určíme počet baktérií za 1,5 hodiny.

$\vdots$

$a_{23} = 2^{23}$ — Určíme počet baktérií za 12 hodín.

$s_{23} = 2 \cdot \frac{2^{23} - 1}{2 - 1} \doteq 16\,770\,000$ — Sčítame namnožené baktérie.

Za 12 hodín sa z 1 baktérie namnoží približne 16 770 000 baktérií.

Pr. 4

Ak vzrastie výroba každý rok o 3 %, urči, o koľko percent vzrastie výroba za 5 rokov.

V_0 — Označíme objem výroby na začiatku 1. roka.

$V_1 = V_0 + V_0 \cdot \frac{3}{100} = V_0(1+0{,}03) = 1{,}03V_0$ — Vypočítame objem výroby na konci 1. roka.

$V_2 = 1{,}03 \cdot V_1 = 1{,}03^2 \cdot V_0$ — Vypočítame objem výroby na konci 2. roka.

$\vdots$

$V_5 = 1{,}03^5\, V_0 = 1{,}16V_0$ — Vypočítame objem výroby na konci 5. roka.

Výroba vzrastie za 5 rokov asi o 16 %.

Pr. 5

Stroj stráca opotrebovaním každý rok 4,5 % svojej ceny. Urči, za akú dobu klesne cena stroja na polovinu.

c_0 — Označíme pôvodnú cenu.

$c_n = \frac{c_0}{2}$ — Vyjadríme cenu na konci n-tého roka.

$c_1 = c_0 - c_0 \cdot \frac{4{,}5}{100} = c_0\left(1-\frac{4{,}5}{100}\right) = c_0 \cdot 0{,}955$ — Vypočítame cenu na konci 1. roka.

$c_2 = c_1 - c_1 \cdot \frac{4{,}5}{100} = c_1\left(1-\frac{4{,}5}{100}\right) = c_1 \cdot 0{,}955 = c_0 \cdot 0{,}955^2$ — Vypočítame cenu na konci 2. roka.

$\vdots$

$c_n = c_0 \cdot 0{,}955^n$

Porovnáme vyjadrenia c_n a dostaneme tak rovnicu. Môžeme ju vydeliť c_0, lebo cena je nenulová.

$$c_0 \cdot 0{,}955^n = \frac{c_0}{2}$$

$$0{,}955^n = \frac{1}{2}$$

Rovnicu zlogaritmujeme.

$$n \cdot \log 0{,}955 = \log 0{,}5$$

$$n = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}955}$$

$$n \doteq 15$$

Cena stroja klesne na polovinu asi za 15 rokov.

Pr. 6

Počet obyvateľov vzrástol za 10 rokov z 25 000 na 33 600.
Urči, aký bol priemerný ročný prírastok obyvateľov v percentách.

$P_0 = 25\,000$ — Označíme pôvodný počet obyvateľov.

$P_1 = P_0 + P_0 \cdot \frac{p}{100} = P_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$ — Vyjadríme počet obyvateľov po roku.

$P_k = P_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^k$ — Vyjadríme počet obyvateľov po k rokoch.

$P_{10} = P_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^{10}$ — Vyjadríme počet obyvateľov po 10 rokoch, dosadíme do vzťahu známe údaje za P_0 a P_{10}, získame tak rovnicu.

$$33\,600 = 25\,000 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^{10}$$

$$\frac{33\,600}{25\,000} = \left(1+\frac{p}{100}\right)^{10}$$

Rovnicu zlogaritmujeme.

$$\log\frac{33\,600}{25\,000} = 10 \cdot \log\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

$$0{,}128399 = 10 \cdot \log \frac{100+p}{100}$$
$$0{,}0128399 = \log \frac{100+p}{100}$$
$$\frac{100+p}{100} = 10^{0{,}0128399}$$
$$p = 10^{2{,}0128399} - 100$$
$$p \doteq 3$$

Ročný prírastok obyvateľov bol asi 3 %.

Pr. 7

Odvoď, na akú sumu vzrastie vklad N_0 pri p % zloženom úrokovaní za n rokov.

N_0 — Vyjadríme vklad na začiatku 1. roka.

$N_1 = N_0 + N_0 \frac{p}{100} = N_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ — Vypočítame vklad na konci 1. roka.

$N_2 = N_1 + N_1 \frac{p}{100} = N_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = N_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$ — Vypočítame vklad na konci 2. roka.

$\vdots$

$N_n = N_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ — Vyjadríme vklad na konci n-tého roka.

Vklad N_0 vzrastie pri p % zloženom úrokovaní za n rokov na sumu $N_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

Pr. 8

Niekto si požičal 100 000 Sk. Zaviazal sa, že čiastku splatí dvoma rovnakými splátkami, z ktorých jedna bude splatná o dva roky, druhá o 4 roky odo dňa pôžičky. Urči veľkosť týchto splátok pri 2 % celoročnom zloženom úrokovaní.

$N_0 = 100\,000$ — Označíme požičanú čiastku.

x — *Označíme splátku.*

$N_2 = N_0 \left(1 + \frac{2}{100}\right)^2 = N_0 \cdot 1{,}02^2$ — Vypočítame splátku na konci 2. roka.

$N_2 - x$ — Označíme zvyšok, ktorý ešte treba zaplatiť.

$N_4 = (N_2 - x) \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^2 = (N_2 - x) \cdot 1{,}02^2$ — Vypočítame splátku na konci 4. roka (po ďalších 2 rokoch).

$N_4 - x = 0$ — Zapíšeme vyrovnanosť dlhu po splatení 2. splátky.

$(N_2 - x) \cdot 1{,}02^2 - x = 0$ — Dosadíme za N_2.

$$(N_0 \cdot 1{,}02^2 - x) \cdot 1{,}02^2 - x = 0$$
$$N_0 \cdot 1{,}02^4 - x \cdot 1{,}02^2 - x = 0$$
$$N_0 \cdot 1{,}02^4 = x \cdot (1{,}02^2 + 1)$$
$$x = \frac{N_0 \cdot 1{,}02^4}{1{,}02^2 + 1}$$

Dosadíme za $N_0 = 100\,000$.

$$x = \frac{100\,000 \cdot 1{,}02^4}{1{,}02^2 + 1}$$
$$x \doteq 53\,050$$

Napríklad pri 16 % úrokovaní sa splátka zmení na $x = \frac{N_0 \cdot 1{,}16^4}{1{,}16^2 + 1} = \frac{100\,000 \cdot 1{,}16^4}{1{,}16^2 + 1} = \frac{181\,064}{2{,}3456} = 77\,193$, čiže výška jednej splátky je 77 193 Sk a zákazník teda zaplatí 153 386 Sk.

Splátky budú vo výške 53 050 Sk. Zákazník zaplatí spolu 106 100 Sk.

Pr. 9

Vypočítaj hodnotu výrazu $V = \dfrac{1+2+3+4+\ldots+n}{n+\dfrac{n}{2}+\dfrac{n}{4}+\dfrac{n}{8}+\ldots}$.

$V = \dfrac{č}{j}$

Označíme čitateľa a menovateľa výrazu.

$č = 1+2+3+4+\ldots\ldots+n = \dfrac{n}{2}(1+n)$

Čitateľ je súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti, v ktorej $a_1 = 1$ a $d = 1$

$j = n+\dfrac{n}{2}+\dfrac{n}{4}+\dfrac{n}{8}+\ldots = \dfrac{n}{1-\dfrac{1}{2}} = 2n$

Menovateľ je súčet nekonečného geometrického radu, v ktorom $a_1 = n$ a $q = \dfrac{1}{2}$

$V = \dfrac{č}{j} = \dfrac{\dfrac{n}{2}(1+n)}{2n} = \dfrac{n+1}{4}$

Dosadíme za $č$ a j do výrazu.

Pr. 10

Zapíš číslo $2,\overline{4}$ ako zlomok v základnom tvare.

1. postup

$2,\overline{4} = 2,4444\ldots = 2+0,4+0,04+0,004+0,0004+\ldots =$
$= 2+4\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}+4\cdot10^{-3}+4\cdot10^{-4}+\ldots = 2+s$
$s = 4\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}+4\cdot10^{-3}+4\cdot10^{-4}+\ldots =$

Je to súčet nekonečného geometrického radu, pričom $a_1 = 4\cdot10^{-1}$ a $q = 10^{-1}$.

$= \dfrac{\dfrac{4}{10}}{1-\dfrac{1}{10}} = \dfrac{4}{9}$

$2,\overline{4} = 2+s = 2+\dfrac{4}{9} = \dfrac{22}{9}$

2. postup

$x = 2,\overline{4} \Rightarrow 10x = 24,\overline{4} \Rightarrow 10x - x = 24,\overline{4} - 2,\overline{4} = 9x = 22 \Rightarrow x = \dfrac{22}{9}$

$2,\overline{4} = \dfrac{22}{9}$

24. Planimetrické pojmy a poznatky

Obsah kapitoly:

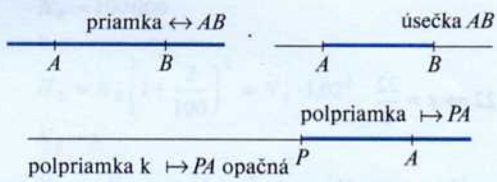
- Rovinné útvary, základné pojmy planimetrie
- Konvexný a nekonvexný uhol
- Polohové a metrické vzťahy medzi uhlami
- Polohové a metrické vzťahy medzi priamkami
- Stredový a obvodový uhol

Rovinné útvary, základné pojmy planimetrie

Základné geometrické pojmy bod a priamka vznikali abstrakciou z hmotných objektov. Nedefinujeme ich. Tieto a iné pojmy patria do časti matematiky, ktorá sa nazýva GEOMETRIA. PLANIMETRIA, ktorá je časťou geometrie, študuje geometrické útvary v ROVINE E_2. Body sú prvkami tejto roviny. Označujeme ich veľkými písmenami $A, B,$... Píšeme: bod $A \in E_2$. PRIAMKY sú podmnožinami tejto roviny, označujeme ich malými písmenami p, q... a píšeme $p \subset E_2$. Medzi bodmi a priamkami platí $A \in p$, $B \notin p$ a podobne. O dvoch bodoch platí $A = B$ (bod A sa rovná bodu B alebo bod A splýva s bodom B), $C \neq D$ (bod C sa nerovná bodu D alebo bod C nesplýva s bodom D). Obdobne o dvoch priamkach platí $p = q$ (priamka p sa rovná priamke q alebo priamka p splýva s priamkou q), $r \neq s$ (priamka r sa nerovná priamke s alebo priamka r nesplýva s priamkou s).

O priamke $p \subset E_2$ platí: dvoma navzájom rôznymi bodmi A, B prechádza práve jedna priamka. Označujeme ju $\leftrightarrow AB$.

Bod P rozdeľuje priamku p na dve navzájom opačné POLPRIAMKY. Bod P je ZAČIATOČNÝM BODOM každej z týchto POLPRIAMOK. Každý iný bod priamky p je VNÚTORNÝM BODOM jednej z oboch POLPRIAMOK. Polpriamku, ktorej začiatočným bodom je bod P a vnútorným bodom je bod A, označujeme $\mapsto PA$.

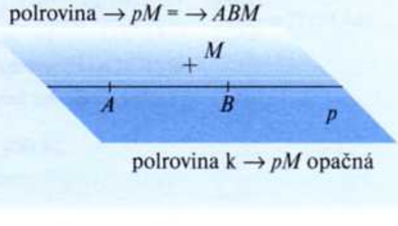


Ak sú body $A \neq B$ a $A \in p$, $B \in p$, tak ÚSEČKU AB definujeme ako prienik dvoch polpriamok, čiže takto:
$AB = \mapsto AB \cap \mapsto BA$. Body A, B sa nazývajú KRAJNÉ (hraničné) BODY ÚSEČKY, ostatné body sú VNÚTORNÉ BODY ÚSEČKY AB. DĹŽKA (veľkosť) ÚSEČKY AB je vzdialenosť bodov A, B - označujeme ju $|AB|$. Bod S, ktorý úsečku AB delí tak, že platí $|AS| = |SB|$, sa nazýva STRED ÚSEČKY.

Ak má úsečka AB dĺžku a, píšeme $a = |AB|$. Ak $|AB| > |CD|$, hovoríme, že úsečka AB je väčšia (dlhšia) než úsečka CD alebo úsečka CD je menšia (kratšia) než úsečka AB.

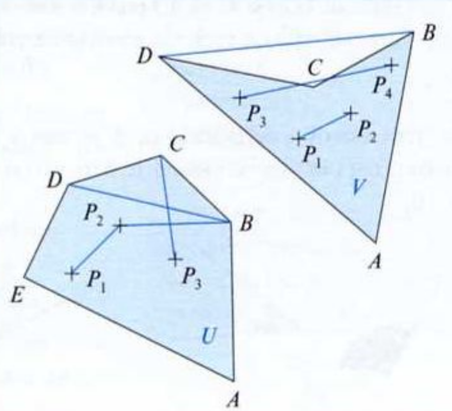
SÚČTOM ÚSEČIEK s dĺžkami a, b je úsečka s dĺžkou $a + b$. ROZDIELOM ÚSEČIEK s dĺžkami a, b $(a > b)$ je úsečka s dĺžkou $a - b$.

Priamka p delí rovinu r na dve navzájom opačné POLROVINY. Táto priamka je HRANICOU (hraničnou priamkou) oboch POLROVÍN. Každý iný bod roviny r, ktorý neleží na hraničnej priamke, je VNÚTORNÝM BODOM jednej z oboch polrovín. Polrovinu s hranicou $p = \leftrightarrow AB$ a vnútorným bodom M označujeme $\rightarrow pM$ alebo $\rightarrow ABM$.



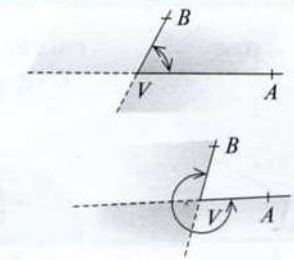
Konvexný a nekonvexný uhol

Geometrický útvar sa nazýva **KONVEXNÝ**, ak každý bod úsečky spájajúcej ľubovoľné dva body útvaru je bodom tohto útvaru. Útvar U na obrázku je konvexný, pretože $P_1P_2 \subset U$, $BP_2 \subset U$, $CP_3 \subset U$, $BD \subset U$ atď.
Útvar V na obrázku nie je konvexný, hoci $P_1P_2 \subset V$, ale napr. $P_3P_4 \not\subset V$, $BD \not\subset V$.



UHOL AVB definujeme ako prienik dvoch polrovín $\rightarrow AVB$ a $\rightarrow BVA$. Bod V nazývame **VRCHOL UHLA** AVB, polpriamky $\mapsto VA$, $\mapsto VB$ nazývame **RAMENÁ UHLA** AVB. Uhol AVB sa nazýva **KONVEXNÝ UHOL**.

Uhol, ktorý vznikne zjednotením polrovín opačných k polrovinám $\rightarrow AVB$ a $\rightarrow BVA$, sa nazýva **NEKONVEXNÝ UHOL** AVB a označuje sa $\not< AVB$.

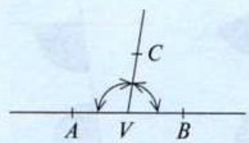


Polohové a metrické vzťahy medzi uhlami

Ak sú polpriamky $\mapsto VA$, $\mapsto VB$ opačné, sú oba uhly AVB **PRIAME UHLY**. Ak sa $\mapsto VA = \mapsto VB$, tak tieto polpriamky určujú **NULOVÝ UHOL** $\sphericalangle AVB$ (neobsahuje žiadne ďalšie body roviny) a zároveň aj **PLNÝ UHOL** $\not< AVB$ (jeho vnútornými bodmi sú všetky ostatné body roviny).

Dva konvexné uhly AVC a BVC, ktoré majú spoločné rameno VC a ktorých ramená VA, VB sú navzájom opačné polpriamky, sa nazývajú **SUSEDNÉ UHLY**.

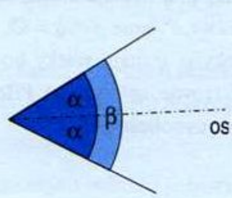
PRAVÝ UHOL je taký uhol, ktorý je zhodný so svojím susedným uhlom.



Hovoríme, že dva **UHLY SÚ ZHODNÉ** práve vtedy, keď je možné jeden premiestniť tak, že splynú (kryjú sa).
Píšeme potom $\sphericalangle AVB \cong \sphericalangle CUD$.

VEĽKOSŤ UHLA AVB označujeme $|\sphericalangle AVB|$. Ak je veľkosťou konvexného uhla AVB číslo α, píšeme $|\sphericalangle AVB| = \alpha$. Niekedy písmenom α označujeme priamo uhol. Na tento účel používame aj iné písmená gréckej abecedy.

OS UHLA je polpriamka so začiatkom vo vrchole uhla, ktorá uhol rozdelí na dva zhodné uhly.



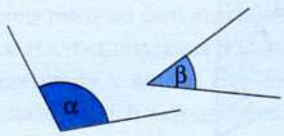
Na meranie uhlov používame:

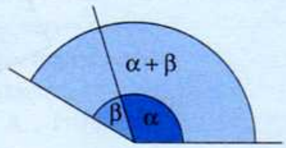
- **UHLOVÝ STUPEŇ** (označujeme ho $1°$), čo je $\frac{1}{90}$ pravého uhla. Menšími jednotkami sú **UHLOVÁ MINÚTA** (označujeme ju $1'$) a **UHLOVÁ SEKUNDA** (označujeme ju $1''$), pričom platí: $1° = 60' = 3\,600''$.
- **OBLÚKOVÚ MIERU**, ktorej jednotkou je radián (označujeme 1 rad). Najčastejšie sa používa v goniometrii.
- **GRÁD** (označujeme ho 1^g), čo je $\frac{1}{100}$ pravého uhla.

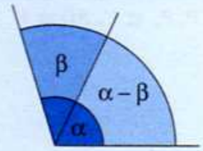
Konvexný uhol, ktorý je menší než pravý, sa nazýva **OSTRÝ UHOL**.
Konvexný uhol, ktorý je väčší než pravý, sa nazýva **TUPÝ UHOL**.

Konvexný uhol AVB je väčší než konvexný uhol CUD, ak $|\sphericalangle AVB| > |\sphericalangle CUD|$.

SÚČTOM UHLOV s veľkosťami α, β je uhol s veľkosťou $\alpha + \beta$.
ROZDIELOM UHLOV s veľkosťami α, β $(\alpha > \beta)$ je uhol s veľkosťou $\alpha - \beta$.

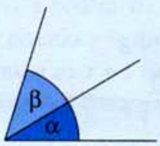






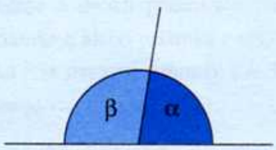
Rozdelenie uhlov a ich názvy vzhľadom na ich polohu:

UHLY STYČNÉ



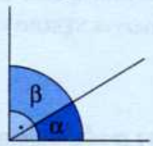
UHLY SUSEDNÉ

$\alpha + \beta = 180°$



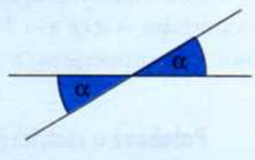
UHLY DOPLNKOVÉ

$\alpha + \beta = 90°$

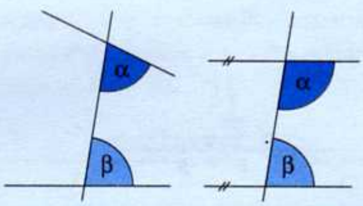


UHLY VRCHOLOVÉ

(sú zhodné)

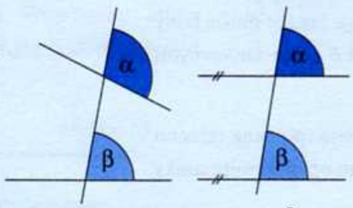


UHLY PRIĽAHLÉ



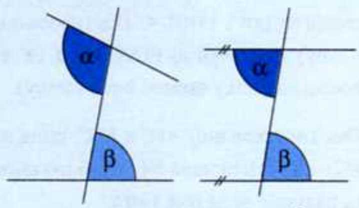
$\alpha + \beta = 180°$

UHLY SÚHLASNÉ



$\alpha = \beta$

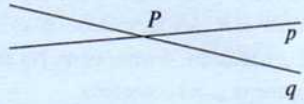
UHLY STRIEDAVÉ



$\alpha = \beta$

Polohové a metrické vzťahy medzi priamkami

Kritériom určenia vzájomnej polohy dvoch priamok ležiacich v rovine je počet ich spoločných bodov:



- Ak priamky p, q majú jediný spoločný bod P, tak sa nazývajú **RÔZNOBEŽKY**, bod P je ich **PRIESEČNÍK**. Píšeme $p \cap q = \{P\}$.
- *Ak priamky p, q nemajú žiadny spoločný bod, tak sa nazývajú* **ROVNOBEŽKY**. Píšeme $p \cap q = \emptyset$, $p \parallel q$.

- Ak priamky p, q majú všetky body spoločné, tak sa nazývajú **TOTOŽNÉ** (rovné, splývajúce). Píšeme $p \cap q = p = q$. Ide o zvláštny prípad rovnobežnosti.

ODCHÝLKA dvoch PRIAMOK p, q v rovine je v prípade rôznobežných priamok veľkosť každého z ostrých alebo pravých uhlov, ktoré spolu priamky zvierajú. Píšeme $|\sphericalangle pq| = \alpha$. Ak sú p a q rovnobežné (resp. totožné), tak $\alpha = 0°$.

Ak sa $\alpha = 90°$, tak priamky p, q nazývame KOLMICAMI (alebo kolmými priamkami). Píšeme $p \perp q$ a čítame „priamka p je kolmá na priamku q". Ich priesečník sa nazýva PÄTA KOLMICE.

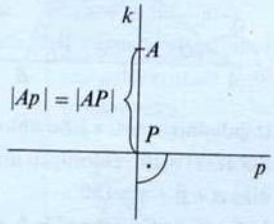
Daná je priamka p a bod A. Bodom A vedieme kolmicu k na priamku p. Bod P, priesečník priamok, je päta kolmice. VZDIALENOSŤ BODU A OD PRIAMKY p je dĺžka úsečky AP. Píšeme $|Ap| = |AP|$.

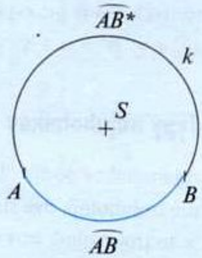
Dané sú priamky $p \parallel q$; Body A, B sú priesečníky priamok p, q s ľubovoľnou kolmicou k na tieto priamky. VZDIALENOSŤ ROVNOBEŽNÝCH PRIAMOK p a q je vzdialenosť bodov A a B. Značíme $|pq| = |AB|$. Ak sa $p = q$, tak $|pq| = 0$.

V rovine sa dá viesť daným bodom A k danej priamke p práve jedna:
- rovnobežka q,
- kolmica k.

(pozri aj kap. 30)

Priamka, ktorá prechádza stredom S úsečky AB a je na ňu kolmá, sa nazýva OS ÚSEČKY.

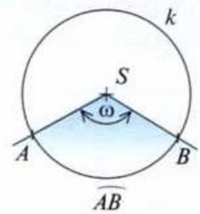


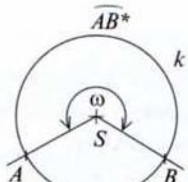


Stredový a obvodový uhol

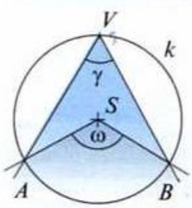
Nech je daná kružnica $k(S; r)$. Dva rôzne body A, B, ktoré na kružnici ležia, rozdelia kružnicu na dva oblúky $\widehat{AB}$ a $\widehat{AB}^*$.
Tieto oblúky nazývame OPAČNÉ OBLÚKY.

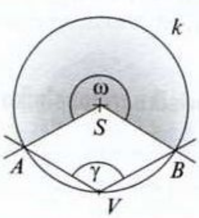
Uhol, ktorého vrcholom je stred S kružnice k a ktorého ramená prechádzajú bodmi A, B oblúka kružnice k, sa nazýva STREDOVÝ UHOL prislúchajúci ku kružnicovému oblúku, ktorý v tomto uhle leží. Obvykle ho označujeme ω.





Ku každému stredovému uhlu ω prislúcha nekonečne mnoho tzv. OBVODOVÝCH UHLOV $\gamma = \sphericalangle AVB$, ktorých vrchol V leží na opačnom kružnicovom oblúku ako oblúk prislúchajúci stredovému uhlu $\omega = \sphericalangle ASB$.





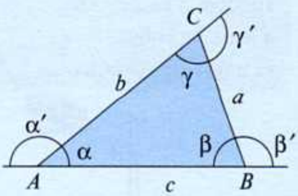
Veľkosť stredového uhla sa rovná dvojnásobku veľkosti obvodového uhla prislúchajúceho k tomu istému kružnicovému oblúku. Teda $|\sphericalangle AVB| = 2 \cdot |\sphericalangle ASB|$ alebo $\omega = 2\gamma$. Z uvedenej vety vyplývajú tieto dôsledky:

- Všetky obvodové uhly prislúchajúce k danému oblúku sú zhodné.
- Obvodový uhol prislúchajúci k menšiemu z dvoch navzájom opačných kružnicových oblúkov je ostrý.
- Obvodový uhol prislúchajúci k väčšiemu z dvoch navzájom opačných kružnicových oblúkov je tupý.
- Obvodový uhol prislúchajúci k polkružnici je pravý.

25. Trojuholníky

Trojuholník a jeho charakteristické prvky

TROJUHOLNÍK ABC je definovaný ako prienik troch polrovín, čiže $\Delta\, ABC = \rightarrow ABC \cap \rightarrow BCA \cap \rightarrow CAB$.



Vrcholy $\Delta\, ABC$ označujeme A, B, C, strany $\Delta\, ABC$ označujeme a, b, c, vnútorné uhly $\Delta\, ABC$ označujeme α, β, γ, vonkajšie uhly $\Delta\, ABC$ označujeme α', β', γ'.

O trojuholníku ABC a jeho uhloch platí:

- Súčet veľkostí vnútorných uhlov sa rovná 180°, čiže $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
- Veľkosť vonkajšieho uhla $\Delta\, ABC$ sa rovná súčtu veľkostí vnútorných uhlov pri zvyšných dvoch vrcholoch, teda $\alpha' = \beta + \gamma$, $\beta' = \alpha + \gamma$, $\gamma' = \alpha + \beta$.

Typy trojuholníkov

Rovnako dlhé strany rovnoramenného trojuholníka nazývame RAMENÁ, tretiu stranu nazývame ZÁKLADŇA.

Typy trojuholníkov podľa dĺžok strán:

- Ak má trojuholník dve strany rovnako dlhé, tak je to trojuholník ROVNORAMENNÝ.
- Ak sú veľkosti všetkých strán trojuholníka zhodné, čiže ak sa $a = b = c$, tak je to trojuholník ROVNOSTRANNÝ.
- Ak o dĺžkach strán trojuholníka a, b, c platí $a \neq b \neq c \neq a$, tak je to trojuholník RÔZNOSTRANNÝ (všeobecný).

Typy trojuholníkov podľa veľkostí vnútorných uhlov:

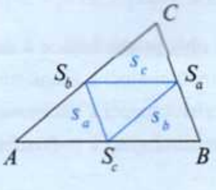
- Ak má trojuholník všetky vnútorné uhly ostré, tak je to trojuholník OSTROUHLÝ.
- Ak má trojuholník jeden vnútorný uhol tupý, tak je to trojuholník TUPOUHLÝ.
- Ak má trojuholník jeden vnútorný uhol pravý, tak je to trojuholník PRAVOUHLÝ.

Trojuholníková nerovnosť, stredná priečka trojuholníka

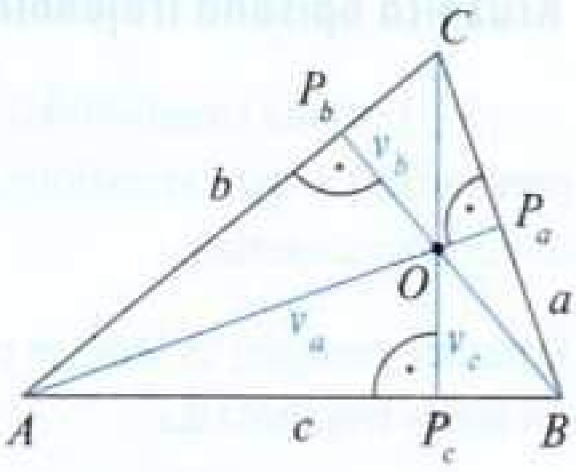
TROJUHOLNÍKOVÁ NEROVNOSŤ: Úsečky s dĺžkami a, b, c sú stranami trojuholníka práve vtedy, keď platí $|b - c| < a < b + c$.

V každom trojuholníku platí: oproti dlhšej strane leží väčší vnútorný uhol, oproti väčšiemu vnútornému uhlu leží dlhšia strana.

STREDNÁ PRIEČKA trojuholníka je úsečka spájajúca stredy dvoch strán trojuholníka. Každá stredná priečka je rovnobežná s tou stranou trojuholníka, ktorej stred nespája. Jej dĺžka sa rovná polovine dĺžky tejto strany. Stredné priečky označujeme zvyčajne s_a, s_b, s_c.

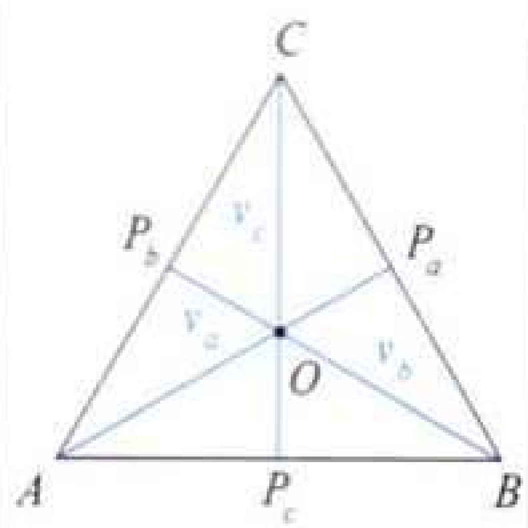
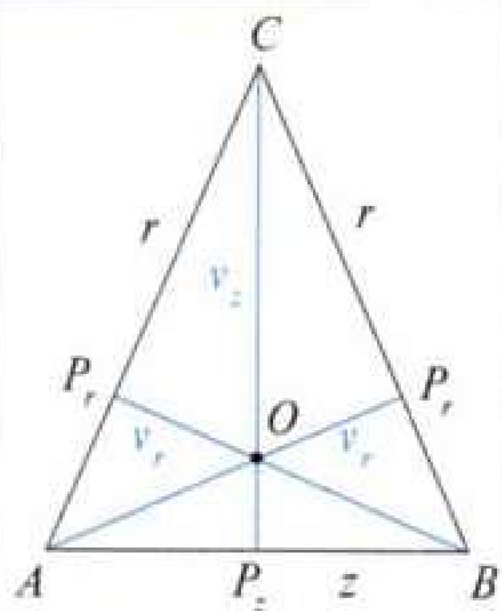
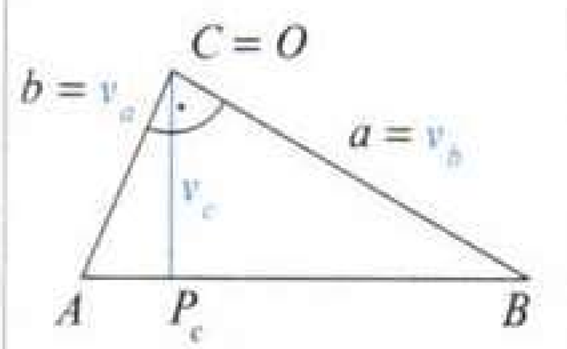
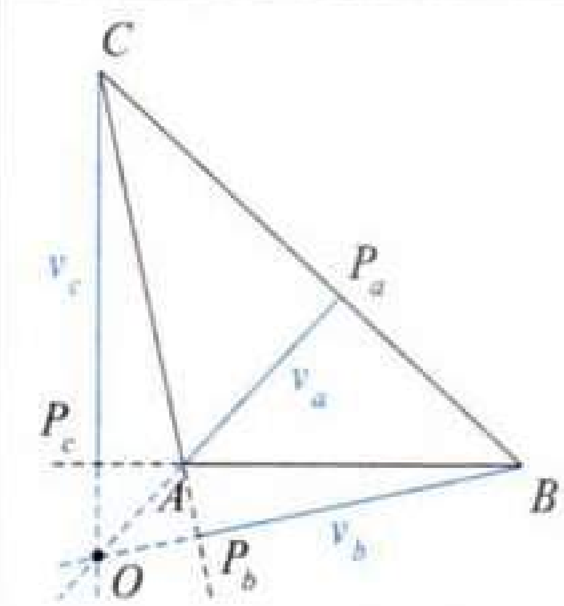


Výšky a ťažnice trojuholníka



VÝŠKA TROJUHOLNÍKA ABC je úsečka, ktorej jedným krajným bodom je vrchol trojuholníka (napr. A) a druhým päta kolmice (napr. P_a) vedenej z tohto vrcholu na stranu (alebo na priamku, na ktorej strana leží) trojuholníka ležiacu oproti tomuto vrcholu. Výšky označujeme obvykle v_a, v_b, v_c.

Priesečník priamok, na ktorých ležia výšky, je práve jeden bod, nazýva sa ORTOCENTRUM a obvykle ho označujeme O.

V rovnostrannom trojuholníku platí $v_a = v_b = v_c$.	V rovnoramennom trojuholníku platí: výšky na ramená majú rovnakú veľkosť.	V pravouhlom trojuholníku platí: každá odvesna je zároveň jeho výškou na druhú odvesnu.	V tupouhlom trojuholníku platí: niektoré výšky ležia mimo trojuholníka. V tupouhlom trojuholníku leží ortocentrum O mimo trojuholníka.
			

ŤAŽNICA TROJUHOLNÍKA ABC je úsečka spájajúca vrchol trojuholníka so stredom jeho protiľahlej strany. Ťažnice označujeme obvykle t_a, t_b, t_c.

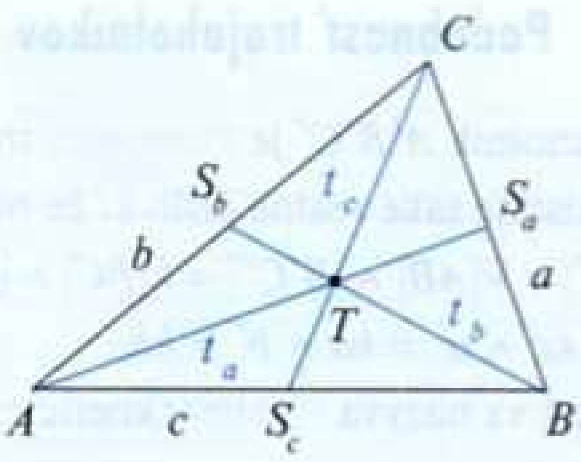
Ťažnice sa pretínajú v jednom bode zvanom ŤAŽISKO trojuholníka ABC, tento bod označujeme T.

Vzdialenosť ťažiska od vrcholov ΔABC sa rovná dvom tretinám dĺžky príslušnej ťažnice. Platí teda:

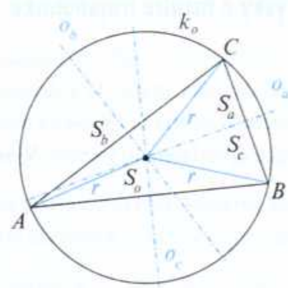
$$|S_aT| = \frac{1}{3}t_a \wedge |AT| = \frac{2}{3}t_a,$$

$$|S_bT| = \frac{1}{3}t_b \wedge |BT| = \frac{2}{3}t_b,$$

$$|S_cT| = \frac{1}{3}t_c \wedge |CT| = \frac{2}{3}t_c.$$

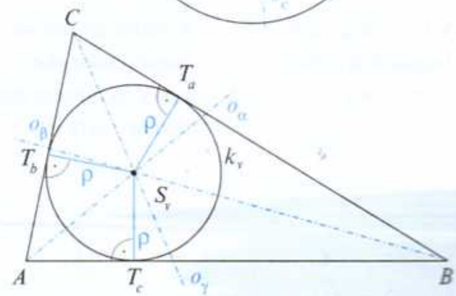


Kružnica opísaná trojuholníku a vpísaná do trojuholníka



KRUŽNICA k_o opísaná trojuholníku ABC je taká kružnica, ktorá prechádza každým vrcholom $\Delta\ ABC$. Jej polomer označujeme r.

Stred kružnice opísanej $\Delta\ ABC$ je priesečník osí strán tohto trojuholníka.



KRUŽNICA k_v vpísaná do trojuholníka ABC je taká kružnica, ktorá sa dotýka každej strany $\Delta\ ABC$. Jej polomer označujeme ρ.

Stred kružnice vpísanej do $\Delta\ ABC$ je priesečník osí vnútorných uhlov tohto trojuholníka.

Zhodnosť trojuholníkov

Hovoríme, že dva TROJUHOLNÍKY SÚ ZHODNÉ práve vtedy, keď ich možno premiestniť tak, že sa kryjú (splývajú). Potom píšeme $\Delta\ ABC \cong \Delta\ KLM$.

O zhodnosti trojuholníkov sa presvedčujeme tak, že zisťujeme zhodnosť niektorých strán a uhlov.
VETA *sss*: Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú vo všetkých troch stranách, sú zhodné.
VETA *usu*: Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v jednej strane a uhloch priľahlých k tejto strane, sú zhodné.
VETA *sus*: Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch stranách a uhle nimi zovretom, sú zhodné.
VETA *Ssu*: Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch stranách a uhle ležiacom oproti väčšej z nich, sú zhodné.

Podobnosť trojuholníkov

Trojuholník $A'B'C'$ je PODOBNÝ trojuholníku ABC, ak existuje také reálne číslo k, že platí:
$|A'B'| = k|AB| \wedge |B'C'| = k|BC| \wedge |C'A'| = k|CA|$ alebo
$c' = kc \wedge a' = ka \wedge b' = kb$.
Číslo k sa nazýva POMER (koeficient) PODOBNOSTI.

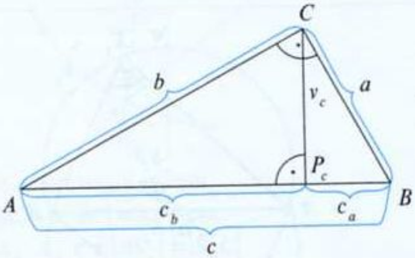
Ak je $k > 1$, podobnosť sa nazýva ZVÄČŠENIE.
Ak je $k < 1$, podobnosť sa nazýva ZMENŠENIE.
Ak je $k = 1$, trojuholníky sú zhodné.

O podobnosti trojuholníkov sa presvedčujeme tak, že zisťujeme podobnosť niektorých strán a zhodnosť niektorých uhlov.
VETA *uu*: Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch uhloch, sú podobné.
VETA *sus*: Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v pomere dĺžok dvoch stranách a uhle nimi zovretom, sú podobné.
VETA *Ssu*: Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v pomere dĺžok dvoch stranách a uhle ležiacom oproti väčšej z nich, sú podobné.

stred opísanej kružnice v pravouhlom Δ je v strede prepony

Euklidove vety a Pytagorova veta

Ak v pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C označíme P_c pätu výšky v_c, ak strany a, b nazveme odvesny, stranu c prepona, ak úsek prepony bližší k odvesne a označíme c_a, úsek prepony bližší k odvesne b označíme c_b, tak sa dajú na základe podobnosti dokázať nasledujúce vety.



EUKLIDOVA VETA O VÝŠKE: V každom pravouhlom trojuholníku ABC platí $c_a \cdot c_b = v_c^2$.

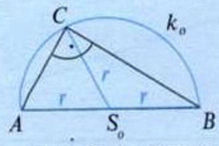
EUKLIDOVA VETA O ODVESNE: V každom pravouhlom trojuholníku ABC platí $c \cdot c_a = a^2$ a $c \cdot c_b = b^2$.

PYTAGOROVA VETA: V každom pravouhlom trojuholníku ABC platí $a^2 + b^2 = c^2$.

Tieto vety a goniometrické funkcie pravouhlého trojuholníka (uvedené v kapitole č. 19) nám umožňujú riešiť pravouhlý trojuholník.

Pre úplnosť ešte uvedieme vzťah pre obvod o pravouhlého trojuholníka $o = a + b + c$ a vzťah pre obsah S pravouhlého trojuholníka $S = \dfrac{c \cdot v_c}{2} = \dfrac{a \cdot b}{2}$.

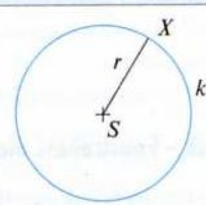
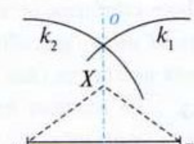
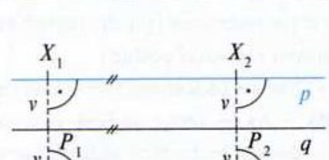
Pre polomer r kružnice opísanej pravouhlému trojuholníku platí $r = \dfrac{c}{2}$.



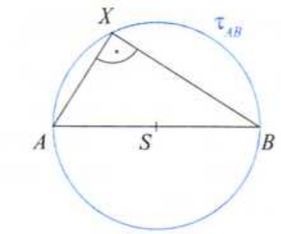
Pre polomer ρ kružnice vpísanej do pravouhlého trojuholníka platí $\rho = \dfrac{a + b - c}{2}$.

Množina bodov s danou vlastnosťou

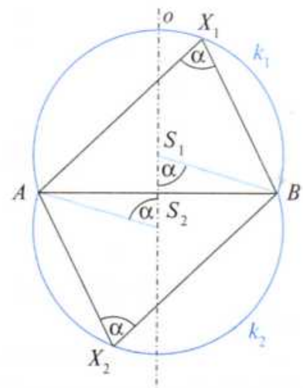
Pri riešení planimetrických úloh používame aj množiny bodov s danými vlastnosťami.

KRUŽNICA $k(S; r)$ je množina všetkých bodov v rovine, ktoré majú od bodu S vzdialenosť r. Symbolicky $k(S; r) = \{X \in \mathsf{E}_2 ; \lvert SX \rvert = r\}$.	
OS o ÚSEČKY AB je množina všetkých bodov v rovine, ktoré majú od bodov A, B rovnakú vzdialenosť. Symbolicky $o = \{X \in \mathsf{E}_2 ; \lvert AX \rvert = \lvert BX \rvert\}$.	
Množina všetkých bodov v rovine, ktoré majú od priamky q vzdialenosť $v > 0$, je DVOJICA PRIAMOK p, p' rovnobežných s priamkou q. Symbolicky $p \cup p' = \{X \in \mathsf{E}_2 ; \lvert Xq \rvert = v\}$.	

Množina všetkých vrcholov pravých uhlov v rovine, ktorých ramená prechádzajú bodmi A, B ($A \neq B$), čiže množina všetkých bodov v rovine, z ktorých vidíme úsečku AB pod pravým uhlom, je kružnica s priemerom AB, okrem bodov A, B, tzv. TALESOVA KRUŽNICA.
Symbolicky $\tau_{AB} = \{X \in \mathsf{E}_2; |\sphericalangle AXB| = 90°\}$.

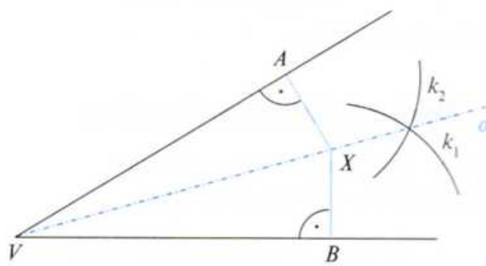


Množina všetkých vrcholov uhlov s veľkosťou α v rovine, ktorých ramená prechádzajú bodmi A, B ($A \neq B$), čiže množina všetkých bodov v rovine, z ktorých vidíme úsečku AB pod uhlom α, sú dva kružnicové oblúky k_1, k_2 s krajnými bodmi A, B, okrem týchto bodov.
Symbolicky
$k_1 \cup k_2 - \{A, B\} = \{X \in \mathsf{E}_2; |\sphericalangle AXB| = \alpha\}$.



Množina všetkých bodov konvexného uhla, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od jeho ramien, je OS tohto UHLA.
Symbolicky $o = \{X \in \mathsf{E}_2; |X, \mapsto VA| = |X, \mapsto VB|\}$.

S ďalšími množinami bodov sa zoznámime v kapitole č. 27.



Trojuholník – konštrukčné úlohy

Každá konštrukčná úloha má tieto časti:

I. ROZBOR – V rozbore načrtneme útvar (trojuholník) tak, akoby už bol zostrojený. Snažíme sa nenačrtnúť nejaký špeciálny prípad, v ktorom platia špeciálne vzťahy. Napríklad trojuholník načrtneme vždy všeobecný. Potom označíme (obvykle inou farbou) dané prvky. Nato hľadáme vzťahy medzi danými prvkami a ostatnými prvkami, ktoré nám umožnia určený útvar zostrojiť.

II. KONŠTRUKCIA A JEJ OPIS – Zapíšeme postup konštrukcie pomocou zaužívanej symboliky a útvar zostrojíme (pri zložitejších konštrukciách či útvaroch je výhodné rysovať a zároveň zapisovať postup).

III. DÔKAZ – Overíme (dokážeme) správnosť riešenia a vyjadríme sa k počtu riešení.

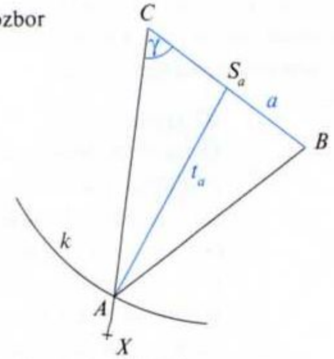
IV. DISKUSIA – Ak je úloha zadaná všeobecne, vždy vykonáme tzv. diskusiu. Uvažujeme o rôznych hodnotách zadaných prvkov (parametrov), respektíve o vplyve ich polohy na počet riešení úlohy.

Pri konštrukcii trojuholníka môžeme okrem množín bodov daných vlastností využiť aj vety *sss, sus, usu, Ssu* o zhodnosti trojuholníkov, môžeme použiť výpočet či geometrické zobrazenia (pozri kapitolu č. 28).

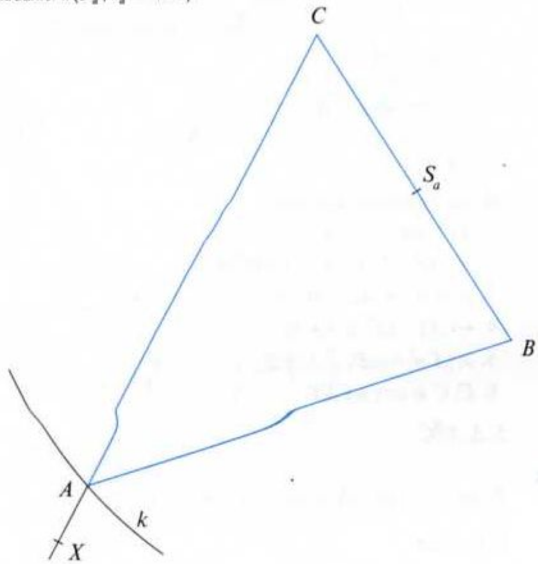
Pr. 1

Zostroj $\Delta\ ABC$, ak je dané: $t_a = 6$ cm, $a = 5$ cm, $\gamma = 60°$.

I. Rozbor



Ťažnica t_a je spojnica stredu strany *a* (bod S_a) a vrcholu *A*. Vrchol *A* bude ležať na ramene uhla $|\sphericalangle BCX| = 60°$, zároveň bude ležať na kružnici $k(S_a; t_a = 6\text{ cm})$.



II. Konštrukcia a jej opis

1. $BC = a; |BC| = a = 5$ cm
2. $S_a; S_a \in a, |BS_a| = |S_aC|$
3. $\mapsto CX; |\sphericalangle BCX| = \gamma = 60°$
4. $k; k(S_a; r = t_a = 6\text{ cm})$
5. $A; A \in k \cap \mapsto CX$
6. $\Delta\ ABC$

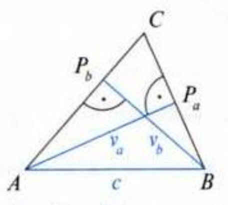
III. Počet riešení

Úloha má jedno riešenie, pretože uhol γ leží oproti dlhšej strane; $t_a > \frac{a}{2}$.

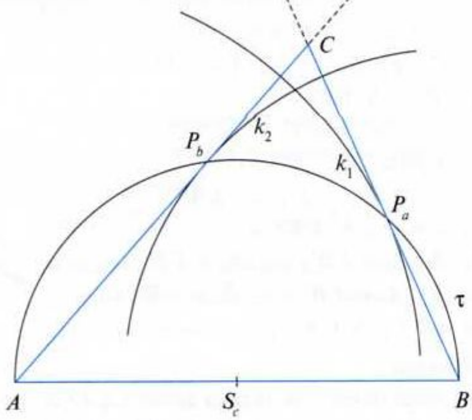
Pr. 2

Zostroj $\Delta\ ABC$, ak je dané: $v_a = 5{,}5$ cm, $c = 6$ cm, $v_b = 4{,}5$ cm.

I. Rozbor



Pretože obe výšky sú kolmé na príslušné strany, budú body P_a, P_b ležať na Talesovej kružnici τ, ktorej priemerom je *c*. Ďalej bude bod P_a ležať na kružnici k_1 $(A; r = v_a)$, bod P_b bude ležať na kružnici k_2 $(B; r = v_b)$, sú to množiny bodov, ktoré majú od bodov *A*, *B* známe vzdialenosti.



II. Konštrukcia a jej opis

1. $AB; |AB| = c = 6$ cm
2. $S_c; S_c \in c, |AS_c| = |S_cB|$
3. $\tau; \tau\left(S_c; r = \frac{c}{2} = 3\text{ cm}\right)$
4. $k_1; k_1(A; r = v_a = 5{,}5\text{ cm})$
5. $k_2; k_2(B; r = v_b = 4{,}5\text{ cm})$
6. $P_a; P_a \in k_1 \cap \tau$
7. $P_b; P_b \in k_2 \cap \tau$
8. $\mapsto AP_b, \mapsto BP_a$
9. $C; C \in \mapsto AP_b \cap \mapsto BP_a$
10. $\Delta\ ABC$

III. Počet riešení

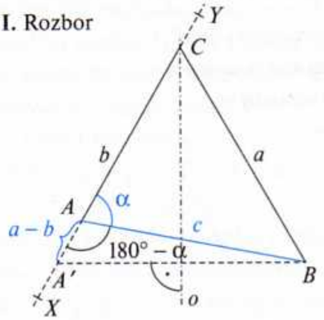
Úloha má jedno riešenie v danej polrovine určenej priamkou *AB*.

(Preto sme z Talesovej kružnice zakreslili len polkružnicu v tejto polrovine.)

Pr. 3

Zostroj $\Delta\ ABC$, ak je dané: $c, \alpha, a-b$.

I. Rozbor

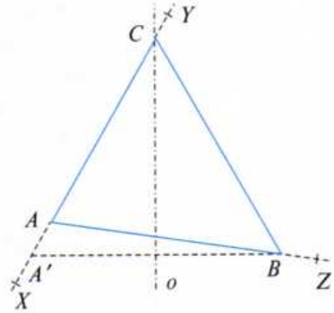


Ak prenesieme stranu a na polpriamku CX, dostaneme úsečku AA'; $|AA'| = a - b$. $\Delta\ A'BA$ môžeme zostrojiť podľa vety *sus*. $\Delta\ A'BC$ je vzhľadom na predchádzajúcu konštrukciu rovnoramenný, preto bod C musí ležať na osi úsečky $A'B$ a priamke XY.

II. Konštrukcia a jej opis

1. AA'; $AA' = a - b$
2. $\mapsto AZ; |\sphericalangle A'AZ| = 180° - \alpha$
3. B; $B \in \mapsto AZ, |AB| = c$
4. $\leftrightarrow XY$; $AA' \subset \leftrightarrow XY$
5. o; $|A'o| = |oB|$, $o \perp A'B$
6. C; $C \in o \cap \leftrightarrow XY$

5. $\Delta\ ABC$



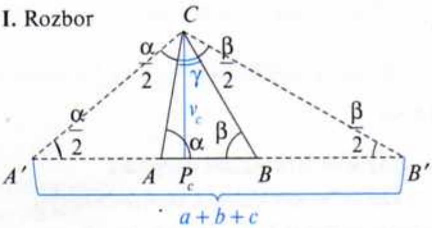
III. Diskusia

Úloha nemá riešenie, ak sa nedá zostrojiť $\Delta\ A'BA$. Ten sa nedá zostrojiť len vtedy, ak je $180° - \alpha \geq 180°$, t. j. $\alpha \leq 0°$, $a - b < c$. Úloha nemá riešenie aj vtedy, ak je $\Delta\ A'BA$ pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole A'. Vtedy je totiž priamka XY rovnobežná s osou o úsečky $A'B$, takže sa nedá zostrojiť ich priesečník C. Ak vylúčime tieto prípady, má úloha v každej polrovine určenej priamkou AB jedno riešenie.

Pr. 4

Zostroj $\Delta\ ABC$, ak je dané: $a + b + c$, v_c, γ.

I. Rozbor



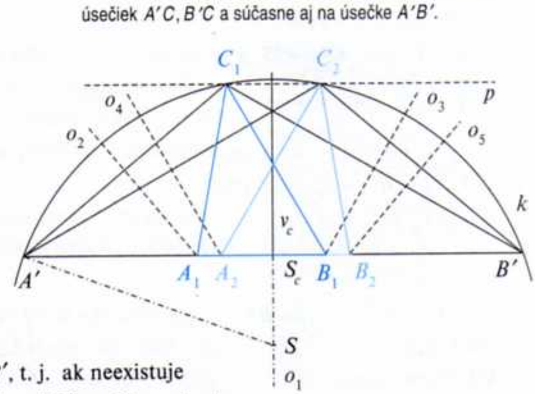
Rozvinieme strany trojuholníka ABC, dostaneme úsečku $A'B'$, ktorá má dĺžku $|A'B'| = a + b + c$. Trojuholníky $A'AC$ a $BB'C$ sú rovnoramenné. Uhly pri základniach $A'C$ a $B'C$ týchto trojuholníkov majú veľkosť $\frac{\alpha}{2}$ a $\frac{\beta}{2}$. Uhol $A'CB'$ má veľkosť

$$|\sphericalangle A'CB'| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° + \frac{\gamma}{2}.$$

Vrchol C bude teda ležať na kružnicovom oblúku, z ktorého vidno úsečku $A'B'$, $|A'B'| = a + b + c$, pod uhlom $90° + \frac{\gamma}{2}$ i na rovnobežke p, $p \parallel A'B'$ vo vzdialenosti v_c. Trojuholník $A'B'C$ sa teda dá zostrojiť. Body A, B budú ležať na osiach úsečiek $A'C$, $B'C$ a súčasne aj na úsečke $A'B'$.

II. Konštrukcia a jej opis

1. $A'B'$, $|A'B'| = a + b + c$
2. k; $k - \{A', B'\} = \left\{X \in \pi_2; |\sphericalangle A'XB'| = 90° + \frac{\gamma}{2}\right\}$
3. p; $p \parallel A'B'$, $|p, A'B'| = v_c$
4. C_1, C_2; $p \cap k = \{C_1, C_2\}$
5. $\Delta\ A'B'C_1, \Delta\ A'B'C_2$
6. o_2, o_3; $|A'o_2| = |o_2C_1|$, $o_2 \perp A'C_1$, $|B'o_3| = |o_3C_1|$, $o_3 \perp B'C_1$
7. o_4, o_5; $|A'o_4| = |o_4C_2|$, $o_4 \perp A'C_2$, $|B'o_5| = |o_5C_2|$, $o_5 \perp B'C_2$
8. A_1, B_1; $A_1 \in A'B' \cap o_2$, $B_1 \in A'B' \cap o_3$
9. A_2, B_2; $A_2 \in A'B' \cap o_4$, $B_2 \in A'B' \cap o_5$
10. $\Delta\ A_1B_1C_1, \Delta\ A_2B_2C_2$



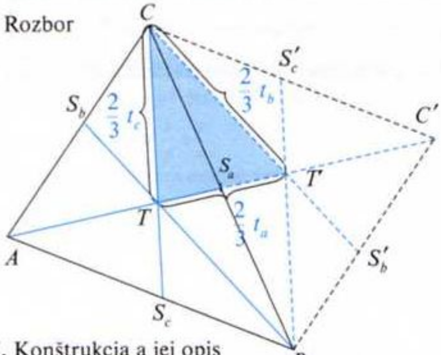
III. Diskusia

Úloha nemá riešenie, ak sa nedá zostrojiť $\Delta\ A'CB'$, t. j. ak neexistuje priesečník kružnicového oblúka k a priamky p. Ak vylúčime tieto prípady, má úloha v každej polrovine určenej priamkou $A'B'$ jedno (priamka p je dotyčnicou kružnicového oblúka k), resp. dve riešenia (priamka p je sečnicou kružnicového oblúka k).

Pr. 5

Zostroj Δ *ABC*, ak je dané: t_a, t_b, t_c.

I. Rozbor



Trojuholník *ABC* doplníme na rovnobežník *ABC′C*.

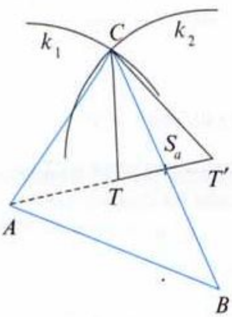
Body *T* a *T′* sú ťažiská trojuholníkov *ABC* a *CBC′*. Z vlastností ťažiska a ťažníc trojuholníka vyplýva, že $|TT'| = \frac{2}{3}t_a$, $|CT| = \frac{2}{3}t_c$, $|CT'| = \frac{2}{3}t_b$.

Trojuholník *TT′C* vieme teda narysovať podľa vety *sss*.

Ďalší rozbor vyplýva z postupu konštrukcie.

II. Konštrukcia a jej opis

1. TT'; $TT' = \frac{2}{3}t_a$
2. k_1; $k_1\left(T; r = \frac{2}{3}t_c\right)$
3. k_2; $k_2\left(T'; r = \frac{2}{3}t_b\right)$
4. S_a; $S_a \in TT'$, $|TS_a| = |S_aT'|$
5. A; $|AS_a| = t_a$, $A \in \rightarrow S_aT$
6. B; $S_a \in CB$, $|CS_a| = |S_aB|$
7. Δ *ABC*



III. Diskusia

Úloha má jedno riešenie, ak sa dá zostrojiť Δ *TT′C*.

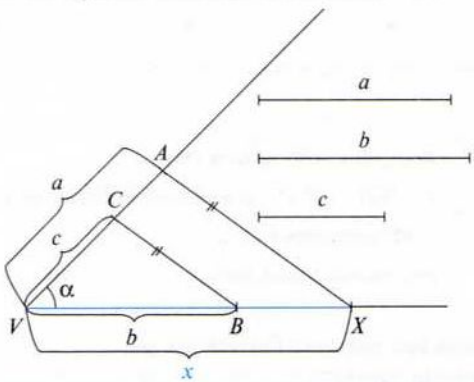
Ten sa dá zostrojiť len vtedy, ak platí trojuholníková nerovnosť, čiže ak $|t_a - t_b| < t_c < t_a + t_b$.

Konštrukcie algebrických výrazov

Pri konštrukcii algebrických výrazov využívame všetky znalosti o trojuholníkoch uvedené v tejto kapitole, čiže podobnosť a zhodnosť trojuholníkov, Euklidove vety, Pytagorovu vetu a pod.

Pr. 6

Zostroj úsečku s dĺžkou $x = \frac{ab}{c}$, pričom úsečky s dĺžkami *a*, *b*, *c* sú dané.



Pri riešení tejto úlohy využijeme podobnosť trojuholníkov.

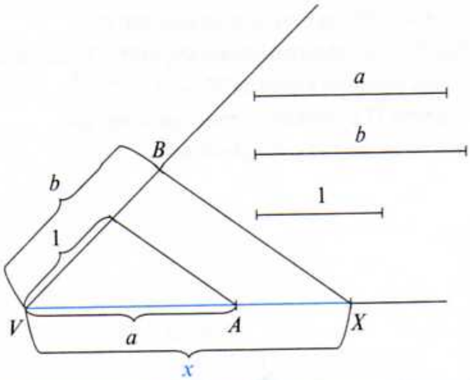
Celá konštrukcia má názov „štvrtá geometricky úmerná" úsečiek s dĺžkami *a*, *b*, *c*.

Vzťah $x = \frac{ab}{c}$ prepíšeme napr. na tvar $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$.

Narysujeme ľubovoľný uhol α a na jeho ramená umiestnime úsečky s dĺžkami *a*, *b*, *c* tak, aby jeden z ich krajných bodov ležal vo vrchole *V* uhla α.

Pr. 7

Zostroj úsečku s dĺžkou $x = ab$.



Vzťah $x = ab$ si prepíšeme napr. na tvar $\frac{x}{b} = \frac{a}{1}$.

Ďalej postupujeme rovnako ako v predchádzajúcom príklade.

Úsečka VX má dĺžku $|VX| = x$.

Pr. 8

Zostroj úsečku s dĺžkou $x = \sqrt{7}$.

Ak si výraz $x = \sqrt{7}$ zapíšeme v tvare $x = \sqrt{7 \cdot 1}$, tak je to napr. vyjadrenie Euklidovej vety o výške, pričom $c_a = 7$, $c_b = 1$, $v = x$.

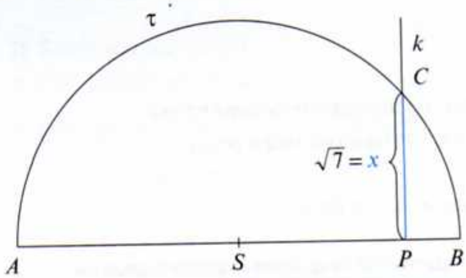
1. AB; $|AB| = 8$
2. P; $P \in AB$, $|AP| = 7$, $|BP| = 1$
3. S; $S \in AB$, $|AS| = |SB|$
4. τ; $\tau(S; |AS|)$
5. k; $P \in k$, $k \perp AB$
6. C; $C \in k \cap \tau$
7. PC; $|PC| = x$

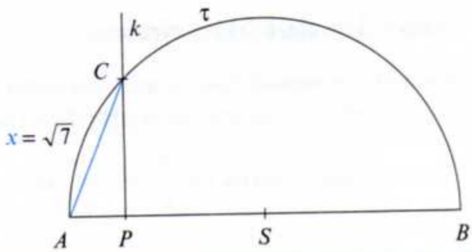
Iný spôsob riešenia:

Ak si výraz $x = \sqrt{7}$ zapíšeme v tvare $x = \sqrt{7 \cdot 1}$, tak je to vyjadrenie Euklidovej vety o odvesne, pričom $c = 7$.

(Príklad je možné riešiť aj pomocou Pytagorovej vety $\sqrt{7} = \sqrt{4^2 - 3^2}$.

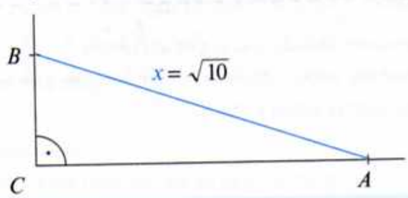
1. AB; $|AB| = 7$
2. P; $P \in AB$, $|AP| = 1$
3. S; $S \in AB$, $|AS| = |SB|$
4. τ; $\tau(S; |AS|)$
5. k; $P \in k$, $k \perp AB$
6. C; $C \in k \cap \tau$
7. AC; $|AC| = x$





Pr. 9

Zostroj úsečku s dĺžkou $x = \sqrt{10}$.



Ak si výraz $x = \sqrt{10}$ zapíšeme v tvare $x = \sqrt{9+1} = \sqrt{3^2 + 1^2}$, čo je vyjadrenie Pytagorovej vety pre $\Delta\, ABC$ s odvesnami $a = 3$, $b = 1$, preponou bude hľadaná úsečka x.

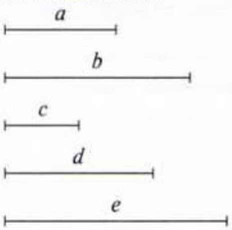
Jednotlivé uvedené postupy môžeme aj kombinovať. Použijeme buď niektorú z Euklidových viet, alebo Pytagorovu vetu a zároveň použijeme aj „štvrtú geometricky úmernú“.

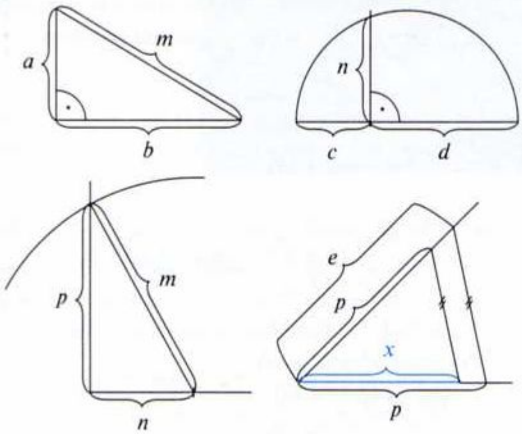
Pr. 10

Zostroj úsečku $x = \dfrac{a^2 + b^2 - cd}{e}$.

Ak výraz upravíme pomocou substitúcie $m^2 = a^2 + b^2$, $n^2 = cd$, $m^2 - n^2 = p^2$ dostaneme výraz $x = \dfrac{p^2}{e}$, ktorý upravíme na tvar $\dfrac{x}{p} = \dfrac{p}{e}$.

Ďalší postup rozložíme na niekoľko krokov.





Úlohy na riešenie pravouhlého, rovnoramenného a rovnostranného trojuholníka

Pri riešení numerických úloh o trojuholníkoch hľadáme pomocou známych prvkov trojuholníka (strany, uhly, výšky...) prvky neznáme (pozri s. 96).

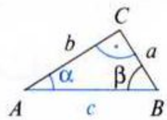
Pr. 11

Vypočítaj chýbajúce základné prvky v pravouhlom $\Delta\ ABC$, ak je dané: $c = 18{,}2$ cm, $\alpha = 32°30'$, $\gamma = 90°$.

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \sin\alpha = 18{,}2 \cdot \sin 32°30' \doteq 9{,}78$ cm

$\cos\alpha = \dfrac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos\alpha = 18{,}2 \cdot \cos 32°30' \doteq 15{,}35$ cm

$\beta = 90° - \alpha = 90° - 32°30' = 57°30'$



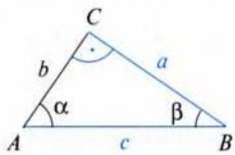
Pr. 12

Vypočítaj chýbajúce základné prvky v pravouhlom $\Delta\ ABC$ s pravým uhlom pri vrchole C, ak je dané: $c = 27{,}5$ cm, $a = 22{,}6$ cm.

$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{27{,}5^2 - 22{,}6^2} \doteq 15{,}7$ cm

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{22{,}6}{27{,}5} \Rightarrow \alpha = 55°16'$

$\beta = 90° - \alpha = 90° - 55°16' = 34°44'$



Pr. 13

Rieš pravouhlý $\Delta\ ABC$ s pravým uhlom pri vrchole C, ak je dané: $a + b = 9{,}6$ m, $\alpha = 37°30'$.

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c} \Rightarrow c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{c} \Rightarrow c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$; $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\cos\alpha}$

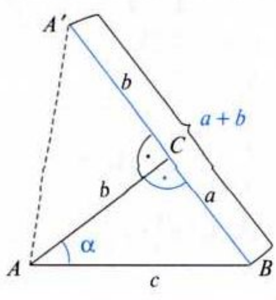
$a + b = 9{,}6 \Rightarrow b = 9{,}6 - a$

$\dfrac{a}{\sin 37°30'} = \dfrac{9{,}6 - a}{\cos 37°30'} \Rightarrow a = \dfrac{9{,}6 \sin 37°30'}{\sin 37°30' + \cos 37°30'} \doteq 4{,}17$ m

$b = 9{,}6 - a = 9{,}6 - 4{,}17 = 5{,}43$ m

$c = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{4{,}17}{\sin 37°30'} \doteq 6{,}85$ m

$\beta = 90° - \alpha = 90° - 37°20' = 52°30'$



Pr. 14 Vypočítaj strany pravouhlého $\Delta\ ABC$ s pravým uhlom pri vrchole C, ak je daná strana $c = 5$ cm a polomer kružnice $\rho = 1$ cm vpísanej do trojuholníka.

$$\rho = \frac{a+b-c}{2}$$

$$1 = \frac{a+b-5}{2} \Rightarrow a+b=7$$

Zapíšeme vzťah pre polomer kružnice vpísanej do pravouhlého trojuholníka a dosadíme do neho.

$$a^2+b^2=c^2=25$$

Pre pravouhlý trojuholník platí Pytagorova veta $a^2+b^2=c^2$.

$$a+b=7 \quad \Rightarrow a=7-b \quad ①$$

$$a^2+b^2=25$$

Dostali sme sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi, ktorú riešime dosadzovacou metódou.

$$(7-b)^2+b^2=25$$

$$49-14b+b^2+b^2=25$$

$$2b^2-14b+24=0$$

$$b^2-7b+12=0$$

$$(b-4)\cdot(b-3)=0 \Rightarrow b_1=4,\ b_2=3$$

Dosadíme za b naspäť do rovnice ①.

$$a_1=3,\ a_2=4$$

Trojuholník má buď strany $a_1 = 3$ cm, $b_1 = 4$ cm, $c = 5$ cm, alebo $a_2 = 4$ cm, $b_2 = 3$ cm, $c = 5$ cm.

Pr. 15 Vypočítaj strany pravouhlého $\Delta\ ABC$ s pravým uhlom pri vrchole C, ak sú dané ťažnice $t_a = 12$ cm a $t_b = 15$ cm.

$$t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow 4t_a^2 = 4b^2 + a^2 \quad ①$$

Zapíšeme Pytagorovu vetu pre pravouhlý $\Delta\ AS_aC$.

$$t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow 4t_b^2 = 4a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 4t_b^2 - 4a^2 \quad ②$$

Zapíšeme Pytagorovu vetu pre pravouhlý $\Delta\ BS_bC$.

Dosadíme za b^2 do rovnice ①.

$$4t_a^2 = 16t_b^2 - 16a^2 + a^2$$

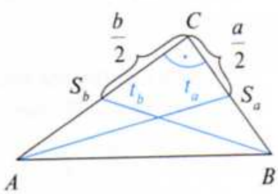
$$a^2 = \frac{16t_b^2 - 4t_a^2}{15} = \frac{16\cdot 15^2 - 4\cdot 12^2}{15} \Rightarrow a \doteq 14{,}2 \text{ cm}$$

Dosadíme naspäť za a do rovnice ②.

$$b^2 = 4t_b^2 - 4a^2 = 4\cdot 15^2 - 4\cdot 201{,}6 \Rightarrow b \doteq 9{,}7 \text{ cm}$$

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{14{,}2^2+9{,}7^2} \doteq 17{,}2 \text{ cm}$$

Pomocou Pytagorovej vety určíme c.



Pr. 16 V rovnostrannom trojuholníku vypočítaj výšku, polomer kružnice opísanej trojuholníku i vpísanej do trojuholníka, ak je daná strana a trojuholníka.

$$v^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Vzťah, ktorý vyplýva z $\Delta\ S_aBC$.

$$t = v \Rightarrow t = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

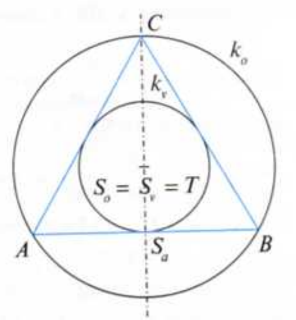
$$r = \frac{2}{3}t$$

Dosadíme za t a vyjadríme polomer opísanej kružnice.

$$r = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$

$$\rho = |S_vS_a| = \frac{1}{3}t = \frac{a}{6}\sqrt{3}$$

Vyjadríme polomer kružnice vpísanej do trojuholníka.



26. Mnohouholníky

Obsah kapitoly:

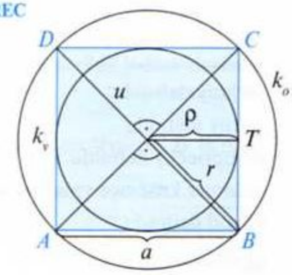
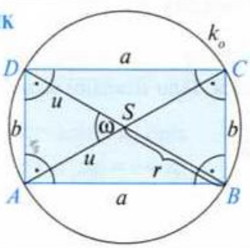
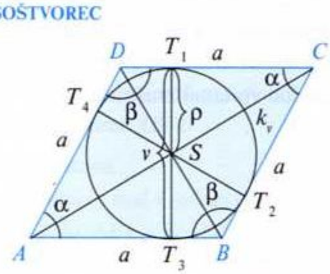
Pojem mnohouholník a štvoruholník

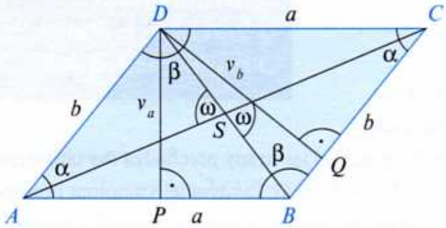
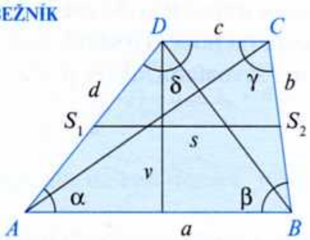
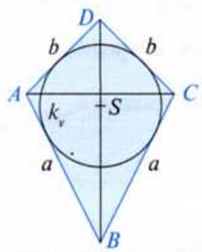
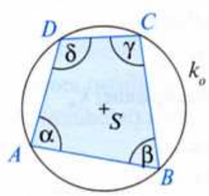
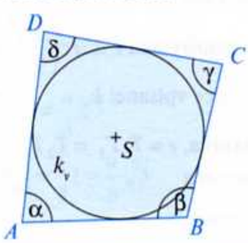
LOMENOU ČIAROU $A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n$ so stranami $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$,..., $A_{n-1} A_n$ a vrcholmi A_1, A_2,..., A_{n-1}, A_n nazývame takú množinu úsečiek $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, ..., $A_{n-1} A_n$, v ktorej každým vnútorným bodom každej jej strany prechádza iba táto strana a každým vrcholom najviac dve jej strany. Lomená čiara sa nazýva UZAVRETÁ, ak každým jej vrcholom prechádzajú jej dve strany. MNOHOUHOLNÍK (n-uholník) je ohraničený útvar, ktorého hranicou je uzavretá lomená čiara s n vrcholmi, pričom žiadne dve susedné strany neležia na jednej priamke a n je prirodzené číslo > 2.

ŠTVORUHOLNÍK je mnohouholník, kde $n = 4$. Konvexný štvoruholník môžeme definovať aj ako prienik štyroch polrovín, čiže štvoruholník $ABCD = \rightarrow ABC \cap \rightarrow BCD \cap \rightarrow CDA \cap \rightarrow DAB$. VRCHOLY ŠTVORUHOLNÍKA označujeme A, B, C, D, STRANY ŠTVORUHOLNÍKA a, b, c, d, VNÚTORNÉ UHLY ŠTVORUHOLNÍKA $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ a UHLOPRIEČKY ŠTVORUHOLNÍKA označujeme $e = AC$, $f = BD$.

Typy štvoruholníkov

Rozdelenie štvoruholníkov, ich charakteristické vlastnosti, vzťahy pre obvody a obsahy jednotlivých štvoruholníkov:

ŠTVORUHOLNÍK	VLASTNOSTI ŠTVORUHOLNÍKOV	
ŠTVOREC 	A, B, C, D	vrcholy štvorca
	a	strana štvorca (susedné strany sú navzájom kolmé)
	$u = a\sqrt{2}$	uhlopriečka štvorca
	$r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$	polomer kružnice opísanej k_o
	$\rho = \frac{a}{2}$	polomer kružnice vpísanej k_v
	$o = 4a$	obvod štvorca
	$S = a^2 = \frac{u^2}{2}$	obsah štvorca
OBDĹŽNIK 	A, B, C, D	vrcholy obdĺžnika
	a, b	strany obdĺžnika, $a \perp b$
	$u = \sqrt{a^2 + b^2}$	uhlopriečka obdĺžnika
	ω	uhol uhlopriečok
	$r = \frac{u}{2}$	polomer kružnice opísanej k_o
	$o = 2(a + b)$	obvod obdĺžnika
	$S = ab$	obsah obdĺžnika
KOSOŠTVOREC 	A, B, C, D	vrcholy kosoštvorca, $\alpha + \beta = 180°$
	a	strana kosoštvorca
	e, f	uhlopriečky kosoštvorca $e \perp f$; $\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = a^2$
	$\rho = \frac{v}{2}$	polomer kružnice vpísanej k_v
	v	výška kosoštvorca, $v = T_1 T_3 = T_2 T_4$
	$o = 4a$	obvod kosoštvorca
	$S = av = \frac{ef}{2}$	obsah kosoštvorca

ŠTVORUHOLNÍK	VLASTNOSTI ŠTVORUHOLNÍKOV
KOSODĹŽNIK  	A, B, C, D vrcholy kosodĺžnika, $\alpha + \beta = 180°$ a, b strany kosodĺžnika e, f uhlopriečky kosodĺžnika ω uhol uhlopriečok kosodĺžnika v_a, v_b výšky kosodĺžnika $o = 2(a + b)$ obvod kosodĺžnika $S = av_a = bv_b$ obsah kosodĺžnika Pre všetky rovnobežníky platí $\|SA\| = \|SC\|$, $\|SB\| = \|SD\|$.
LICHOBEŽNÍK  Ak $b = d$, nazývame lichobežník **ROVNORAMENNÝ**. Ak $\alpha = 90°$ (a tak aj $\delta = 90°$), nazývame lichobežník **PRAVOUHLÝ**.	A, B, C, D vrcholy lichobežníka a, b, c, d strany lichobežníka a, c základne lichobežníka $a \parallel c$ b, d ramená lichobežníka e, f uhlopriečky lichobežníka $s = \frac{a + c}{2}$ stredná priečka lichobežníka v výška lichobežníka $o = a + b + c + d$ obvod lichobežníka $S = \frac{a + c}{2} \cdot v = sv$ obsah lichobežníka
DELTOID  	A, B, C, D vrcholy deltoidu a, b strany deltoidu e, f uhlopriečky deltoidu, $e \perp f$ ρ polomer kružnice vpísanej k_v $o = 2(a + b)$ obvod deltoidu $S = \frac{ef}{2}$ obsah deltoidu Je súmerný podľa priamky BD.
TETIVOVÝ ŠTVORUHOLNÍK  	Tetivový štvoruholník je taký štvoruholník, ktorému sa dá opísať kružnica. Jeho stranami sú tetivy opísanej kružnice. Platí $\alpha + \gamma = \beta + \delta$.
DOTYČNICOVÝ ŠTVORUHOLNÍK  	Dotyčnicový štvoruholník je taký štvoruholník, do ktorého sa dá vpísať kružnica. Jeho strany ležia na dotyčniciach doň vpísanej kružnice. Platí $a + c = b + d$.

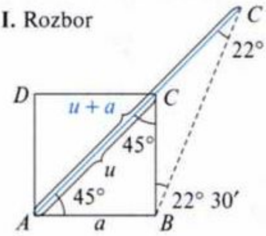
Štvoruholník – konštrukčné úlohy

Pri konštrukcii štvoruholníkov využívame všetky znalosti z kapitol č. 24 a 25, teda podobné a zhodné zobrazenia, množiny bodov s danou vlastnosťou a pod.

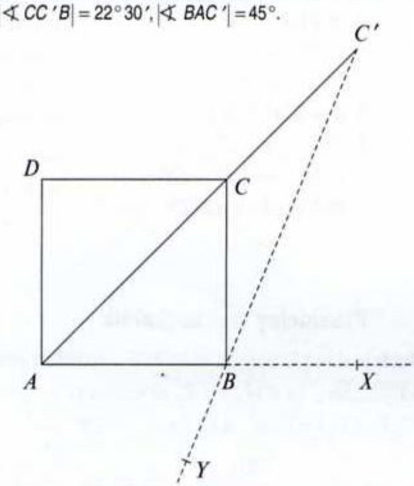
Pr. 1

Zostroj štvorec, ak je daný súčet dĺžky strany a uhlopriečky $a + u$.

I. Rozbor



Prenesieme dĺžku strany a za bod C na polpriamku $\mapsto AC$, úsečka AC' má dĺžku $|AC'| = u + a$. $\Delta\, ABC'$ sa dá zostrojiť podľa *usu*. $\Delta\, BCC'$ je totiž rovnoramenný, v ktorom $|\sphericalangle CC'B| = 22°30'$, $|\sphericalangle BAC'| = 45°$.



II. Konštrukcia a jej opis

1. $AC'; |AC'| = u + a$
2. $\mapsto C'Y; |\sphericalangle AC'Y| = 22°30'$
3. $\mapsto AX; |\sphericalangle C'AX| = 45°$
4. $B; B \in \mapsto C'Y \cap \mapsto AX$
5. $AB; |AB| = a$
6. štvorec $ABCD$

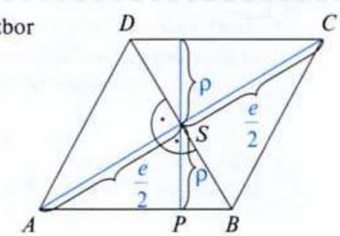
III. Diskusia

Úloha má vždy jediné riešenie.

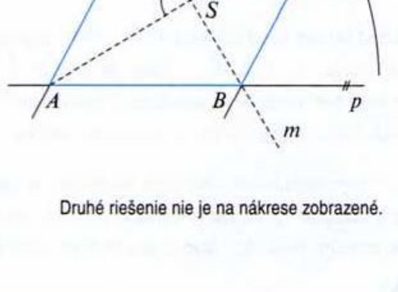
Pr. 2

Zostroj kosoštvorec, ak je daná jedna jeho uhlopriečka a polomer kružnice vpísanej do kosoštvorca.

I. Rozbor



Uhlopriečky v kosoštvorci sú navzájom kolmé a rozpoľujú sa. Ich priesečníkom je bod S, ktorý je stredom vpísanej kružnice. Platí: $v = 2\rho$, pričom ρ je polomer kružnice vpísanej do kosoštvorca a v je výška kosoštvorca.



II. Konštrukcia a jej opis

1. $p, q;\ p \parallel q, |pq| = v = 2\rho$
2. $A;\ A \in p$
3. $k;\ k(A; r = e)$
4. $C; C \in q \cap k$
5. $S;\ S \in AC, |AS| = |SC|$
6. $m;\ S \in m, m \perp AC$
7. $D, B;\ D \in q \cap m, B \in p \cap m$
8. kosoštvorec $ABCD$

III. Diskusia

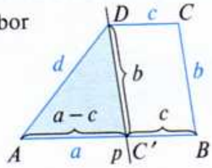
Úloha bude mať v jednej polrovine dve riešenia, ak $e > 2\rho$. Ak $e = 2r$, tak úloha má jediné riešenie (štvorec), ak $e < 2r$, tak úloha nemá riešenie.

Druhé riešenie nie je na nákrese zobrazené.

Pr. 3

Zostroj lichobežník, ak sú dané jeho štyri strany.

I. Rozbor



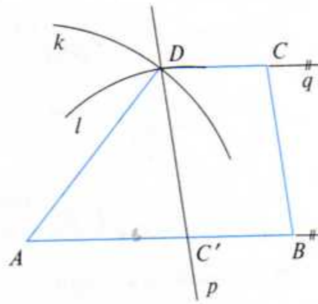
Ak bodom D vedieme rovnobežku $p \parallel b$, pretne p stranu AB v bode C' a AC' má dĺžku $|AC'| = a - c$. $\Delta\, AC'D$ vieme zostrojiť podľa vety *sss*. Ďalej vieme, že základne ležia na rovnobežných priamkach a dĺžky ostatných strán poznáme.

II. Konštrukcia a jej opis

1. $AC'; |AC'| = a - c$
2. $k; k(A; r = d)$
3. $l; l(C'; r = b)$
4. $D; D \in k \cap l$
5. $q; q \parallel AC', D \in q$
6. $C; C \in q, |DC| = c$
7. $B; B \in \rightarrow AC', |AB| = a$
8. lichobežník $ABCD$

III. Diskusia

Úloha má v jednej polrovine jediné riešenie, ak v $\Delta\, AC'D$ platí trojuholníková nerovnosť. Úlohu môžeme riešiť, aj keď zvolíme na AB bod C' tak, aby $|AC'| = c$, potom $l(C'; r = d)$, $k(B; r = b)$, $C \in l \cap k$, $q \| AC'$, $C \in q$, $D \in q$, $|CD| = c$.



Pravidelný mnohouholník

Nech je daná kružnica $k(S; r)$ a n rôznych polpriamok $SX_1, SX_2, SX_3, ..., SX_n$ ($n \in \mathbb{N}, n > 2$), pričom pre polpriamky platí: $|\sphericalangle X_1SX_2| = |\sphericalangle X_2SX_3| = |\sphericalangle X_3SX_4| = ...$

$= |\sphericalangle X_nSX_1| = \dfrac{360°}{n} = \omega$. Označme $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ priesečníky daných polpriamok s kružnicou k. PRAVIDELNÝ MNOHOUHOLNÍK $A_1A_2...A_n$ je potom zjednotením všetkých trojuholníkov $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Tieto trojuholníky sú všetky rovnoramenné a nemajú žiadny vnútorný bod spoločný.

Body $A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}, A_n$ nazývame VRCHOLY PRAVIDELNÉHO MNOHOUHOLNÍKA. Každý vrchol A_i má dva SUSEDNÉ VRCHOLY A_{i-1}, A_{i+1}, pričom o prirodzenom čísle i platí $1 < i < n$. Vrcholy A_n, A_2 sú susedné vrcholy A_1 a vrcholy A_{n-1}, A_1 sú susedné vrcholy A_n.

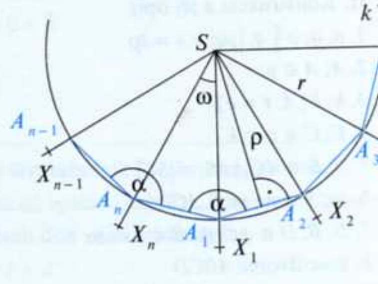
Každé dva susedné vrcholy určujú STRANU MNOHOUHOLNÍKA. Strany, ktoré majú spoločný vrchol, nazývame SUSEDNÉ STRANY. Úsečka, ktorej krajnými bodmi sú dva nesusedné vrcholy mnohouholníka, sa nazýva UHLOPRIEČKA.

Každé dve susedné strany určujú VNÚTORNÝ UHOL pravidelného mnohouholníka (napr. $\sphericalangle A_nA_1A_2$). Uhly ω medzi úsečkami spájajúcimi dva susedné vrcholy so stredom S mnohouholníka sa nazývajú STREDOVÉ UHLY pravidelného mnohouholníka.

Ak chceme vyjadriť, že pravidelný mnohouholník ma práve n vrcholov, hovoríme o PRAVIDELNOM n-UHOLNÍK

O pravidelnom n-uholníku platí:

- všetky strany n-uholníka sú zhodné úsečky,
- všetky vnútorné uhly n-uholníka sú zhodné a veľkosť každého z nich je $\alpha = \dfrac{180°(n-2)}{n}$,
- každý n-uholník má $\dfrac{n(n-3)}{2}$ uhlopriečok.



Kružnica $k(S; r)$ prechádzajúca všetkými vrcholmi sa nazýva KRUŽNICA OPÍSANÁ pravidelnému mnohouh Kružnica $l(S; \rho)$, kde ρ je výška trojuholníka $\Delta\, A_1SA_2$ prislušná k strane A_1A_2, sa nazýva KRUŽNICA VPÍSANÁ do pravidelného mnohouholníka. Bod S je stredom oboch týchto kružníc a je aj STREDOM pravidelného mnohouholníka.

27. Kružnica a kruh

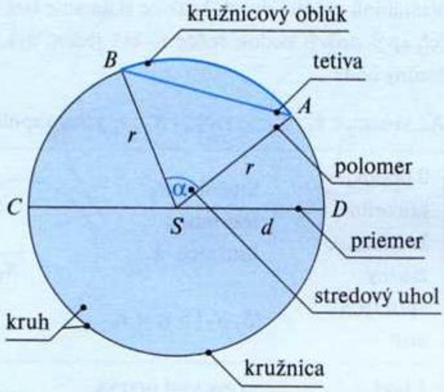
Obsah kapitoly:

Základné pojmy

KRUŽNICOU k so stredom S a polomerom r nazývame množinu všetkých bodov X v rovine, ktoré majú od pevného bodu S konštantnú vzdialenosť $|SX| = r$, kde $r \in \mathrm{R}$, $r > 0$. Zapisujeme $k(S; r)$. Vzdialenosť r nazývame **POLOMER** kružnice, bod S nazývame **STRED** kružnice.

KRUHOM K so stredom S a polomerom r nazývame množinu všetkých bodov X v rovine, ktoré majú od pevného bodu S vzdialenosť $|SX| \leq r$, pričom $r \in \mathrm{R}$, $r > 0$. Zapisujeme $K(S; r)$.

TETIVA kružnice je úsečka spájajúca dva rôzne body kružnice. Najdlhšia tetiva s dĺžkou $d = 2r$ sa nazýva **PRIEMER**.



Dĺžka kružnice alebo obvod kruhu:

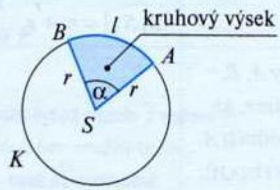
$$o = 2\pi r$$

Obsah kruhu:

$$S = \pi r^2$$

Kruhový výsek, kruhový odsek a medzikružie

KRUHOVÝ VÝSEK je prienik kruhu a uhla, ktorého vrcholom je stred kruhu.



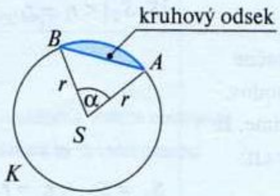
Dĺžka kružnicového oblúka:

$$l = \frac{2\pi r}{360°} \cdot \alpha°$$

Obsah kruhového výseku:

$$S = \frac{\pi r^2 \alpha°}{360°} = \frac{lr}{2}$$

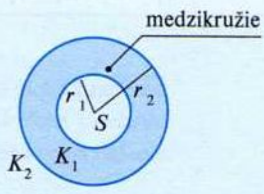
KRUHOVÝ ODSEK je prienik kruhu a polroviny, ktorej hraničná priamka má od stredu kruhu vzdialenosť menšiu ako polomer kruhu.



Obsah kruhového odseku:

$$S = \frac{\pi r^2 \alpha°}{360°} - \frac{1}{2} r^2 \sin\alpha$$

MEDZIKRUŽIE je množina všetkých bodov X v rovine, pre ktoré platí $r_1 \leq |SX| \leq r_2$.



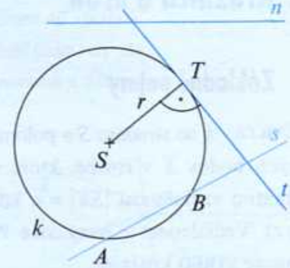
Obsah medzikružia:

$$S = \pi(r_2^2 - r_1^2)$$

Vzájomná poloha kružnice a priamky

Vzájomnú polohu kružnice a priamky skúmame prostredníctvom počtu ich spoločných bodov, môže to byť jeden, dva alebo žiadny bod.

- Priamka s, ktorá má s kružnicou $k(S; r)$ dva rôzne spoločné body A, B, sa nazýva SEČNICA kružnice k.
- Priamka t, ktorá má s kružnicou $k(S; r)$ jediný spoločný bod T, sa nazýva DOTYČNICA kružnice k. Bod T nazývame DOTYKOVÝ BOD.
- Priamka n, ktorá nemá s kružnicou $k(S; r)$ žiadny spoločný bod, sa nazýva NESEČNICA kružnice k.



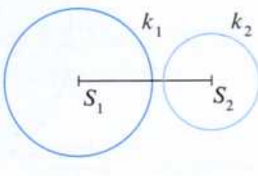
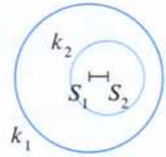
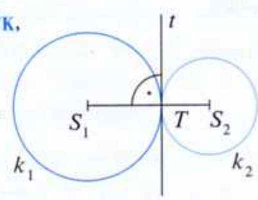
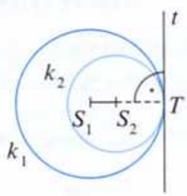
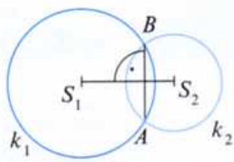
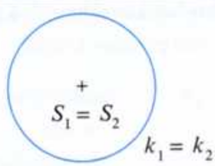
Vzájomná poloha dvoch kružníc

Vzájomnú polohu dvoch kružníc skúmame tiež prostredníctvom počtu ich spoločných bodov, môže to byť jeden, dva, nekonečne veľa alebo žiadny bod.

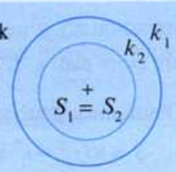
Vzdialenosť stredov $S_1 S_2$ dvoch kružníc nazývame STREDNÁ.

Bod T je dotykovým bodom oboch kružníc. Priamka t je spoločnou dotyčnicou oboch kružníc.

Ak kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a $k_2(S_2; r_2)$ majú spoločných:

0 bodov, hovoríme, že NEMAJÚ žiadny SPOLOČNÝ BOD.	kružnica k_2 leží mimo kružnice k_1  $\lvert S_1 S_2 \rvert > r_1 + r_2$	kružnica k_2 leží vo vnútri kružnice k_1  $\lvert S_1 S_2 \rvert < r_1 - r_2$
1 bod, hovoríme, že sa DOTÝKAJÚ.	VONKAJŠÍ DOTYK,  $\lvert S_1 S_2 \rvert = r_1 + r_2$	VNÚTORNÝ DOTYK,  $\lvert S_1 S_2 \rvert = r_1 - r_2$
2 body A, B, hovoríme, že sa v bodoch A, B PRETÍNAJÚ.	 $\lvert S_1 S_2 \rvert < r_1 + r_2$	
nekonečne veľa bodov, hovoríme, že SPLÝVAJÚ.	 $S_1 = S_2 \wedge r_1 = r_2$	

Ak sa $S_1 = S_2$, tak hovoríme o dvoch SÚSTREDNÝCH KRUŽNICIACH.

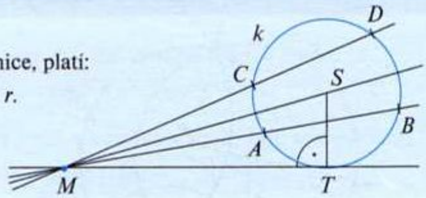


Mocnosť bodu vzhľadom na kružnicu

Uvažujme o kružnici k so stredom S a o bode M, ktorý leží mimo tejto kružnice. Z tohto bodu vedieme dotyčnicu s dotykovým bodom T a sečnice pretínajúce kružnicu v bodoch A, B a C, D. Medzi vzdialenosťami jednotlivých bodov platí tento vzťah:

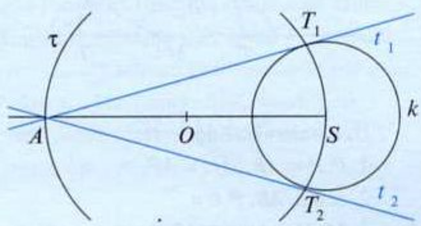
$|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$ aj vtedy, keď bod M leží vo vnútri kružnice k.

MOCNOSŤ BODU M VZHĽADOM NA KRUŽNICU k:
Pre ľubovoľnú kružnicu $k(S; r)$ a bod M, ktorý leží mimo tejto kružnice, platí:
$|MT|^2 = |MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD| = v^2 - r^2$, pričom $|MS| = v$ a $|ST| = r$.



Konštrukcia dotyčnice ku kružnici z bodu

Opis konštrukcie dotyčníc t_1, t_2 ku kružnici $k(S; r)$ z bodu A, $|AS| > r$, pomocou Talesovej kružnice:
1. $O; O \in SA, |SO| = |OA|$
2. $\tau; \tau(O; |SO|)$
3. $T_1, T_2; k \cap \tau = \{T_1, T_2\}$
4. $t_1, t_2; t_1 = \leftrightarrow T_1 A, t_2 = \leftrightarrow T_2 A$



Ak bod A leží vo vnútri kružnice k, $|AS| < r$, tak neexistujú dotyčnice ku kružnici prechádzajúce týmto bodom. Ak bod A leží na kružnici, $|AS| = r$, tak týmto bodom prechádza jediná dotyčnica kružnice. Tá je kolmicou na úsečku AS v bode A.

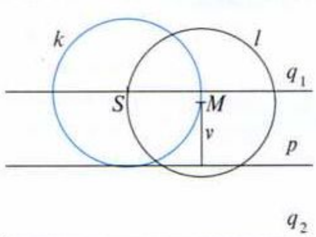
Konštrukčné úlohy

Pri konštrukcii kružníc spĺňajúcich dané vlastnosti využívame nielen poznatky typické pre kružnice, ale i všetky poznatky z kapitol č. 24, 25 a 26 (rovnako ako pri konštrukcii ostatných rovinných útvarov).

Pr. 1

Zostroj kružnicu s daným polomerom r, ktorá sa dotýka danej priamky p a prechádza daným bodom M, ktorý neleží na priamke p.

I. Rozbor



Hľadáme $k(S; r)$. Bod S musí byť od priamky p vzdialený r a od bodu M tiež r. To spĺňajú tieto množiny bodov:
1. dve rovnobežky q_1, q_2, ktoré sú rovnobežné s priamkou p a vzdialené od nej r;
2. kružnica $l(M; r)$.

Obrázok s konštrukciou neuvádzame, pretože konštrukcia nie je vôbec zložitá a jej obrázok by sa veľmi podobal obrázku z rozboru.

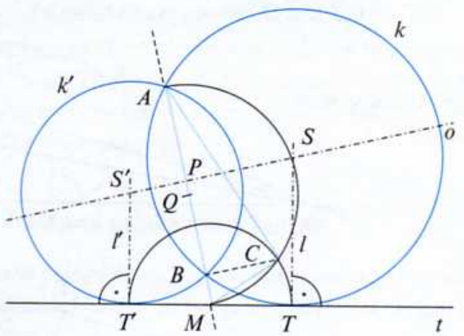
II. Opis konštrukcie
1. $q; q \parallel p, |pq| = r$
2. $l; l(M; r)$
3. $S; S \in l \cap q$
4. $k; k(S; r)$

III. Diskusia
Ak je $v < 2r$, tak má úloha 2 riešenia.
Ak sa $v = 2r$, tak má úloha 1 riešenie.
Ak je $v > 2r$, tak úloha nemá riešenie.

Pr. 2

Rôzne body A, B ležia v jednej polrovine určenej priamkou t a zároveň priamka AB nie je kolmá na priamku t. Zostroj kružnicu k, ktorá prechádza danými bodmi A, B a dotýka sa priamky t, na ktorej neleží ani jeden z bodov A, B.

I. Rozbor



Uvažujme o prípade, keď $\leftrightarrow AB$ je rôznobežná s priamkou t. Priesečník M priamky AB s dotyčnicou t má vzhľadom na hľadanú kružnicu k mocnosť $m = |MA| \cdot |MB| = |MT|^2$, takže $|MT| = \sqrt{|MA| \cdot |MB|}$.

Veľkosť MT zostrojíme podľa Euklidovej vety o odvesne (pozri farebný trojuholník MAC). Na priamku t nanesieme vzdialenosť $|MT| = |MT'| = |MC|$.

Množinou stredov všetkých kružníc, ktoré prechádzajú bodmi A, B, je os úsečky AB. Množinou stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú priamky t v bode T (resp. T'), je kolmica l (resp. l'). Prienikom týchto množín je bod S (resp. S').

II. Konštrukcia a jej opis

1. P; $P \in AB$, $|AP| = |PB|$
2. o; $o \perp AB$, $P \in o$
3. M; $M \in t \cap \leftrightarrow AB$
4. Q; $Q \in AM$, $|AQ| = |QM|$
5. τ; $\tau(Q; |AQ|)$
6. q; $q \perp AM$, $B \in q$
7. C; $C \in \tau \cap q$
8. m; $m(M; |MC|)$
9. T; $T \in t \cap m$
10. l; $T \in l$, $l \perp t$
11. k; $k(S; r)$

Obrázok konštrukcie neuvádzame, pretože je rovnaký ako obrázok z rozboru.

III. Diskusia

Ak je priamka AB rôznobežná s priamkou t, úloha má dve riešenia, čiže dve kružnice k a k'.
Ak je priamka AB rovnobežná s priamkou t, úloha má jediné riešenie.
Úlohu je možné riešiť aj pomocou rovnoľahlosti.

28. Geometrické zobrazenia

Obsah kapitoly:

Zobrazenie v rovine

ZOBRAZENIE Z v rovine je predpis, ktorý každému bodu X roviny priraďuje najviac jeden bod X' roviny. Bod X sa nazýva VZOR, bod X' jeho OBRAZ. Zapisujeme $Z: X \rightarrow X'$.

Body X, o obrazoch ktorých platí $X' = X$, se nazývajú SAMODRUŽNÉ BODY zobrazenia.
Ak sa U = U′, nazývame útvar U SAMODRUŽNÝM ÚTVAROM zobrazenia.

Množinu obrazov všetkých bodov útvaru U označujeme U′ a nazývame OBRAZ ÚTVARU U.

Zobrazenie, v ktorom je každý bod samodružný, sa nazýva IDENTITA.

Zhodné zobrazenia

Zobrazenie v rovine je ZHODNÉ ZOBRAZENIE (zhodnosť), ak obrazom každej úsečky XY je úsečka $X'Y'$ a platí $|XY| = |X'Y'|$.

Súhlasná zhodnosť (identita $\mathcal{I}$, stredová súmernosť $\mathcal{S}$, posúvanie alebo translácia $\mathcal{T}$, otáčanie alebo rotácia $\mathcal{R}$) zobrazí každý orientovaný uhol ako súhlasne orientovaný uhol. Nesúhlasná zhodnosť (osová súmernosť $\mathcal{O}$) zobrazí každý orientovaný uhol ako uhol opačne orientovaný.

V každom zhodnom zobrazení platí:

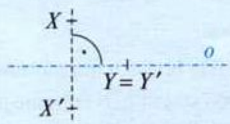
- obrazom priamky AB je priamka $A'B'$,
- obrazom polpriamky AB je polpriamka $A'B'$,
- obrazom polroviny pA je polrovina $p'A'$,
- obrazom útvaru U je útvar U′ zhodný s útvarom U,
- obrazom rovnobežných priamok sú rovnobežné priamky,
- obrazom opačných polpriamok sú opačné polpriamky,
- obrazom opačných polrovín sú opačné polroviny,
- obrazom uhla AVB je uhol $A'V'B'$ zhodný s uhlom AVB.

Osová súmernosť

Daná je priamka o. OSOVÁ SÚMERNOSŤ s osou o je zhodné zobrazenie $\mathcal{O}(o)$, ktoré priraďuje:

- každému bodu $X \notin o$ bod X' tak, že os o je kolmá na priamku XX' a stred úsečky XX' leží na priamke o,
- každému bodu $Y \in o$ bod Y' tak, že $Y' = Y$.

Priamka o sa nazýva OS SÚMERNOSTI.



Samodružnými bodmi osovej súmernosti $\mathcal{O}(o)$ sú všetky body osi súmernosti o.
Samodružnými priamkami osovej súmernosti je os súmernosti a všetky priamky na ňu kolmé.

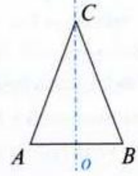
Niektoré útvary U sú súmerné podľa osi alebo niekoľkých osí.

Osová súmernosť $\mathcal{O}(o)$ sa dá využiť pri riešení niektorých úloh o odrazoch a o najkratšom spojení dvoch bodov lomenou čiarou, i pri konštrukcii trojuholníka, ak je jeden z daných prvkov súčet alebo rozdiel strán trojuholníka.

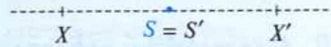
Pr. 1

Nájdi os súmernosti:
a) rovnoramenného trojuholníka ABC so základňou AB, **b)** štvorca $ABCD$, **c)** kružnice $k(S; r)$.

a) Osou súmernosti rovnoramenného trojuholníka so základňou AB je os základne AB, pozri obrázok.
b) Štvorec $ABCD$ má štyri osi súmernosti, sú to dve osi strán a dve priamky, na ktorých ležia uhlopriečky štvorca.
c) Kružnica $k(S; r)$ má nekonečne mnoho osí súmernosti. Osou súmernosti je každá priamka prechádzajúca stredom S kružnice k.



Stredová súmernosť



Daný je bod S. STREDOVÁ SÚMERNOSŤ so stredom S je zhodné zobrazenie $\mathcal{S}(S)$, ktoré priraďuje:

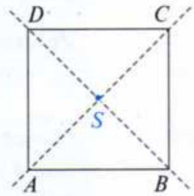
- každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že bod S je stredom úsečky XX',
- bodu S bod S' tak, že $S' = S$.

Bod S sa nazýva STRED SÚMERNOSTI.

Stredová súmernosť $\mathcal{S}(S)$ má jediný samodružný bod, a to stred súmernosti S. Každá priamka, ktorá prechádza stredom súmernosti S, je samodružná.

Niektoré útvary U sú súmerné podľa stredu. Stredová súmernosť je špeciálnym prípadom otáčania a môžeme ju použiť napríklad pri dôkazoch a konštrukčných úlohách.

Pr. 2 Nájdi stred súmernosti štvorca $ABCD$.



Stredom súmernosti štvorca $ABCD$ je priesečník S priamok $\leftrightarrow AC$ a $\leftrightarrow BD$.

Posúvanie

ORIENTOVANÁ ÚSEČKA je úsečka s usporiadanou dvojicou svojich krajných bodov, teda jeden krajný bod je tzv. ZAČIATOČNÝ BOD a druhý je KONCOVÝ BOD.

Orientovanú úsečku so začiatočným bodom A a koncovým bodom B označujeme $\overrightarrow{AB}$. Graficky znázorňujeme orientovanú úsečku so šípkou pri koncovom bode.

DĹŽKA (veľkosť) ORIENTOVANEJ ÚSEČKY $\overrightarrow{AB}$ je dĺžka úsečky AB, označujeme ju $|\overrightarrow{AB}|$.

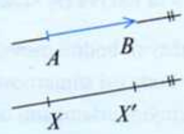
Medzi orientované úsečky patrí aj bod ako orientovaná úsečka, ktorej začiatočný a koncový bod splývajú. Nazývame ju NULOVÁ ORIENTOVANÁ ÚSEČKA. Jej dĺžka sa rovná 0.

Orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ sú súhlasne orientované, ak:

a) ležia na jednej priamke a polpriamka AB je podmnožinou polpriamky CD, či polpriamka CD je podmnožinou polpriamky AB, prípadne obe polpriamky splývajú,

b) ležia na rôznych rovnobežkách a polpriamky AB, CD ležia v tej istej polrovine s hraničnou priamkou AC.

Daná je orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$. POSÚVANIE (alebo translácia) je zhodné zobrazenie $\mathcal{T}(\overrightarrow{AB})$, ktoré každému bodu X priraďuje bod X' tak, že orientované úsečky $\overrightarrow{XX'}$ a $\overrightarrow{AB}$ majú rovnakú dĺžku a sú súhlasne orientované.



Posúvanie nemá žiadne samodružné body (pokiaľ nie je určené nulovou orientovanou úsečkou – vtedy sú všetky body samodružné a hovoríme o identite). Priamky, ktoré sú rovnobežné s priamkou AB, sú samodružné priamky posúvania.

Otáčanie

ORIENTOVANÝ UHOL je uhol s usporiadanou dvojicou svojich ramien, teda jedno rameno je tzv. ZAČIATOČNÉ RAMENO a druhé je KONCOVÉ RAMENO.

Základnou veľkosťou orientovaného uhla AVB je veľkosť tohto uhla, ktorý vytvorí polpriamka VA otočením do polpriamky VB v kladnom zmysle. Je to vždy číslo z intervalu $\langle 0, 2\pi)$, prípadne $\langle 0°, 360°)$.

Orientovaný uhol si môžeme predstaviť ako začiatočnú a koncovú polohu polpriamky, ktorá sa otáča okolo svojho začiatku. Pri otáčaní môže polpriamka vykonať ľubovoľný počet otáčok. Otáčať môžeme proti smeru hodinových ručičiek (čiže v kladnom zmysle), alebo v smere pohybu hodinových ručičiek (čiže v zápornom zmysle).

Ak označíme základnú veľkosť orientovaného uhla AVB písmenom α, tak veľkosťou orientovaného uhla AVB je každá z hodnôt $\alpha + 2k\pi$, prípadne $\alpha + k \cdot 360°$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

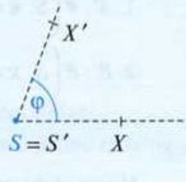
Daný je bod S a orientovaný uhol, ktorého veľkosť je φ. OTÁČANIE (alebo rotácia) je zhodné zobrazenie $R(S, \varphi)$, ktoré priraďuje:

- každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný uhol XSX' má veľkosť φ,
- bodu S bod S', tak, že $S' = S$.

Bod S sa nazýva STRED OTÁČANIA, orientovaný uhol φ je UHOL OTÁČANIA.

Otáčanie $R(S, \varphi)$ má jediný samodružný bod, a to stred otáčania S, ak je uhol otáčania $\varphi \neq 0°$ (ak sa $\varphi = 0°$, tak sú všetky body samodružné a hovoríme o identite).

Otáčanie nemá žiadne samodružné priamky (pokiaľ sa $\varphi \neq 0°$ alebo $\varphi \neq \pi$).



Skladanie zhodných zobrazení

Dané sú dve zhodné zobrazenia $Z_1: X \to X'$, $Z_2: X' \to X''$ a ľubovoľný bod X roviny. Zobrazenie $Z: X \to X''$ sa nazýva ZOBRAZENIE ZLOŽENÉ zo zobrazení Z_1, Z_2 (v tomto poradí). Označujeme ho $Z = Z_1 \circ Z_2$.

Skladanie zobrazení nie je komutatívne, teda $Z_1 \circ Z_2 \neq Z_2 \circ Z_1$.

Zložením dvoch osových súmerností vznikne vždy jedno z týchto zhodných zobrazení: identita, posúvanie, otáčanie (prípadne stredová súmernosť ako zvláštny prípad otáčania o π, resp. o $180°$). Zložením troch osových súmerností je buď osová súmernosť alebo posunutá súmernosť. Skladaním osových súmerností už žiadne iné zhodné zobrazenie nevznikne.

Podobné zobrazenia

Geometrické zobrazenie v rovine nazveme PODOBNÝM ZOBRAZENÍM (podobnosťou), ak obrazom každej úsečky XY je úsečka $X'Y'$ a platí $|XY| = k \cdot |X'Y'|$, kde $k > 0$.

Konštantu k nazývame KOEFICIENT PODOBNOSTI.

Ak sa $k = 1$, ide o zhodnosť.

Ak je $k > 1$, tak podobnosť nazývame ZVÄČŠENIE.

Ak je $0 < k < 1$, tak podobnosť nazývame ZMENŠENIE.

Dva útvary U a U′ nazývame podobnými, ak je možné nájsť také podobné zobrazenie, ktoré priradí útvaru U útvar U′. Píšeme U ~ U′.

Dva trojuholníky $\Delta\, ABC$ a $\Delta\, A'B'C'$ sú podobné práve vtedy, keď existuje také číslo $k > 0$, že platí: $\dfrac{|A'B'|}{|AB|} = \dfrac{|B'C'|}{|BC|} = \dfrac{|A'C'|}{|AC|} = k$.

O zhodnosti a podobnosti trojuholníkov je písané v kapitole č. 25.

Rovnoľahlosť

ROVNOĽAHLOSŤ (homotetia) $H(S, \kappa)$ so STREDOM ROVNOĽAHLOSTI S a KOEFICIENTOM ROVNOĽAHLOSTI κ ($\kappa \in \mathrm{R} - \{0\}$) je podobné zobrazenie, ktoré priraďuje:

- každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$ a bod X' leží na
  - polpriamke SX, ak $\kappa > 0$
  - polpriamke opačnej k polpriamke SX, ak $\kappa < 0$
- bodu S bod S' tak, že $S' = S$.

Každá rovnoľahlosť s koeficientom κ je podobnosťou s pomerom podobnosti $k = |\kappa|$.

Útvar U a jeho obraz U′ v rovnoľahlosti $H(S, \kappa)$ nazývame ROVNOĽAHLÉ ÚTVARY podľa stredu S. Ak je $|\kappa| > 1$, hovoríme o zväčšení a ak je $|\kappa| < 1$, hovoríme o zmenšení.

Ak sa $\kappa = -1$, tak rovnoľahlosť je stredovou súmernosťou.

Ak sa $\kappa = 1$, tak rovnoľahlosť je identitou a má všetky body samodružné.

Ak sa $\kappa \neq 1$, tak rovnoľahlosť má jediný samodružný bod, svoj stred S. V tomto prípade sú samodružnými priamkami všetky priamky prechádzajúce stredom rovnoľahlosti.

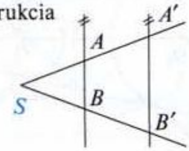
Pr. 3

V rovnoľahlosti $H(S, \kappa = 2)$ zostroj obrazy daných bodov A, B.

I. Opis konštrukcie

1. A'; $H(S, \kappa = 2)$: $A \to A'$
2. B'; $H(S, \kappa = 2)$: $B \to B'$

II. Konštrukcia



III. Počet riešení

Úloha má jediné riešenie.

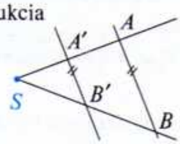
Pr. 4

V rovnoľahlosti $\mathcal{H}\left(S, \kappa = \frac{1}{2}\right)$ zostroj obrazy daných bodov A, B.

I. Opis konštrukcie

1. A'; $\mathcal{H}\left(S, \kappa = \frac{1}{2}\right)$: $A \to A'$
2. B'; $\mathcal{H}\left(S, \kappa = \frac{1}{2}\right)$: $B \to B'$

II. Konštrukcia



III. Počet riešení

Úloha má jediné riešenie.

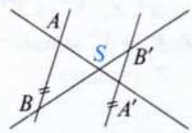
Pr. 5

V rovnoľahlosti $\mathcal{H}\left(S, \kappa = -\frac{1}{2}\right)$ zostroj obrazy daných bodov A, B.

I. Opis konštrukcie

1. A'; $\mathcal{H}\left(S, \kappa = -\frac{1}{2}\right)$: $A \to A'$
2. B'; $\mathcal{H}\left(S, \kappa = -\frac{1}{2}\right)$: $B \to B'$

II. Konštrukcia



III. Počet riešení

Úloha má jediné riešenie.

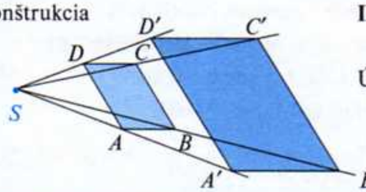
Pr. 6

V rovnoľahlosti $\mathcal{H}(S, \kappa = 2)$ zostroj obraz daného rovnobežníka $ABCD$.

I. Opis konštrukcie

1. A'; $\mathcal{H}(S, \kappa = 2)$: $A \to A'$
2. B'; $\mathcal{H}(S, \kappa = 2)$: $B \to B'$
3. C'; $\mathcal{H}(S, \kappa = 2)$: $C \to C'$
4. D'; $\mathcal{H}(S, \kappa = 2)$: $D \to D'$
5. rovnobežník $A'B'C'D'$

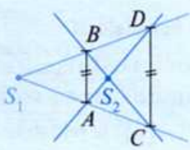
II. Konštrukcia



III. Počet riešení

Úloha má jediné riešenie.

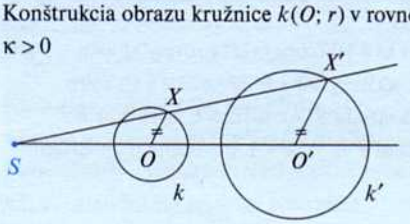
Ak sú dané dve rovnobežné úsečky s rôznymi dĺžkami, tak existujú práve dve rovnoľahlosti, ktoré zobrazia prvú úsečku ako druhú.



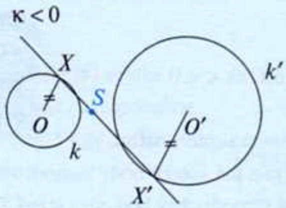
Ak sú dané dve kružnice s rôznymi polomermi, tak existujú práve dve rovnoľahlosti, ktoré zobrazia prvú kružnicu ako druhú.

Konštrukcia obrazu kružnice $k(O; r)$ v rovnoľahlosti $\mathcal{H}(S, \kappa)$ pre:

$\kappa > 0$



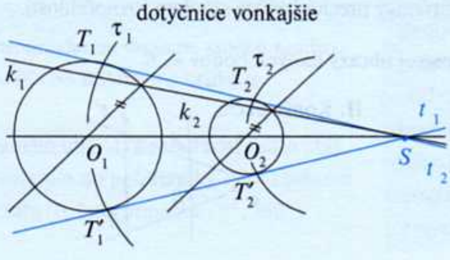
$\kappa < 0$



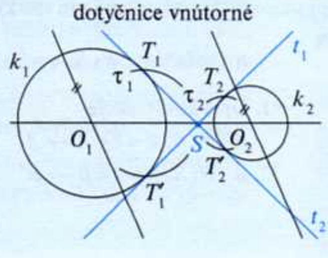
Obrazom kružnice $k(O; r)$ v rovnoľahlosti $\mathcal{H}(S, \kappa)$ je opäť kružnica $k'\left(O'; r' = |\kappa| \cdot r\right)$, pričom obrazom bodu O je bod O'.

Použitie rovnoľahlosti v konštrukcii spoločných dotyčníc t_1, t_2 dvoch kružníc $k_1(O_1; r_1)$, $k_2(O_2; r_2)$; $|O_1O_2| > r_1 + r_2$, $r_1 > r_2$, tak, aby tieto boli:

dotyčnice vonkajšie



dotyčnice vnútorné



Riešené príklady

V jednotlivých príkladoch teraz ukážeme využitie jednotlivých druhov zobrazenia pri konštrukcii jednoduchých rovinných útvarov.

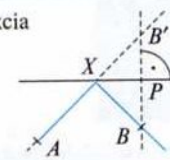
Pr. 7

Daná je priamka p a dva vnútorné body A, B jednej z polrovín určených priamkou p. Nájdi na priamke p bod X tak, aby súčet jeho vzdialenosti od bodov A, B bol najmenší.

I. Opis konštrukcie

1. B'; $\mathcal{O}(p)$: $B \to B'$
2. AB'
3. X; $X \in p \cap AB'$

II. Konštrukcia



III. Počet riešení

Úloha má jediné riešenie.

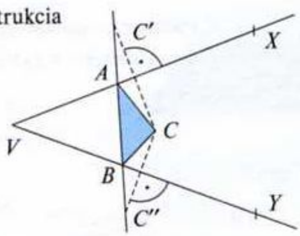
Pr. 8

Daný je ostrý uhol XVY a jeho vnútorný bod C.
Zostroj bod A na ramene VX a bod B na ramene VY tak, aby $\Delta\ ABC$ mal čo najmenší obvod.

I. Opis konštrukcie

1. C'; $\mathcal{O}_1(\leftrightarrow VX)$: $C \to C'$
2. C''; $\mathcal{O}_2(\leftrightarrow VY)$: $C \to C''$
3. $\leftrightarrow C'C''$
4. A; $A \in \mapsto VX \cap C'C''$
5. B; $B \in \mapsto VY \cap C'C''$
6. $\Delta\ ABC$

II. Konštrukcia



III. Počet riešení

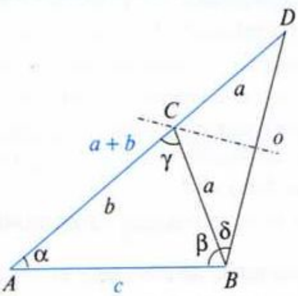
Úloha má jediné riešenie.

Zo všetkých možných $\Delta\ ABC$ má minimálny obvod ten, ktorého body A, B ležia na priamke $C'C''$, pričom obvod trojuholníka $o_{\Delta ABC} = |C'C''|$.

Pr. 9

Zostroj $\Delta\ ABC$, ak je dané: c, $a+b$, $\beta-\alpha$.

I. Rozbor



O znázornenom trojuholníku platí, že $\delta = \frac{\gamma}{2}$,

$$|\sphericalangle ABD| = \beta + \frac{\gamma}{2} = \beta + \frac{180^\circ - (\alpha+\beta)}{2} =$$

$$= \beta + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2} + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\beta-\alpha}{2}.$$

$\Delta\ ABD$ môžeme zostrojiť podľa vety *Ssu*.
Vrchol C leží na osi o rovnoramenného $\Delta\ BDC$.

II. Opis konštrukcie

1. AB; $|AB| = c$
2. $\to BX$; $|\sphericalangle ABX| = 90^\circ + \dfrac{\beta-\alpha}{2}$
3. k; $k(A;\ r = a+b)$
4. D; $D \in k \cap \mapsto BX$
5. S; $S \in BD$, $|BS| = |SD|$
6. o; $o \perp BD$, $S \in o$
7. C; $C \in o \cap AD$
8. $\Delta\ ABC$

Obrázok konštrukcie neuvádzame, pretože by sa veľmi podobal na obrázok z rozboru.

III. Diskusia

Úloha má jediné riešenie, ktoré existuje v prípade, že pre zostrojovaný trojuholník ABC platí trojuholníková nerovnosť, čiže $a+b>c$, a že sa dá zostrojiť trojuholník ABD. Ten sa dá zostrojiť, ak $\beta-\alpha<180^\circ$.

Pr. 10

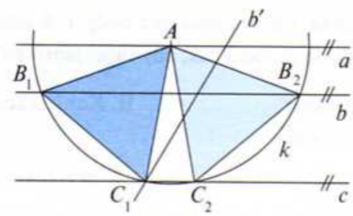
Dané sú tri rôzne rovnobežky a, b, c a bod A na priamke a.
Zostroj rovnostranný $\Delta\ ABC$ tak, aby bod B ležal na priamke b a bod C na priamke c.

I. Rozbor

V otáčaní o 60° okolo bodu A sa zobrazí bod B ležiaci na priamke b do bodu $B' = C$ ležiaceho na obraze b' priamky b. Bod C je teda spoločným bodom priamok b' a c.

II. Konštrukcia a jej opis

1. b'; $R(A, \pm 60°)$: $b \to b'$
2. C; $C \in b' \cap c$
3. k, l; $k(A; |AC|)$, $l(C; |AC|)$
4. B; $B \in k \cap l$
5. $\Delta\ ABC$



III. Diskusia

Úloha má dve riešenia, ktoré vzniknú ako dôsledok dvoch otáčaní priamky b.

Pr. 11

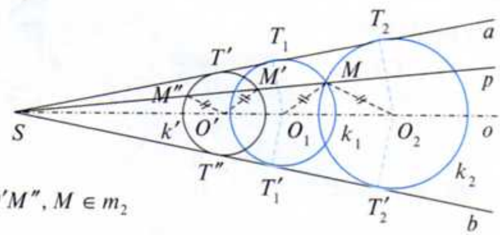
Dané sú dve rôznobežky a, b, ktoré vytvárajú štyri uhly a vnútorný bod M jedného z týchto uhlov.
Zostroj kružnicu, ktorá prechádza bodom M a dotýka sa priamok a, b.

I. Rozbor

Použijeme rovnoľahlosť so stredom vo vrchole uhla a k ľubovoľnej kružnici k', ktorá sa dotýka priamok a, b, zostrojíme rovnoľahlé kružnice k_1 a k_2, ktoré prechádzajú bodom M.

II. Konštrukcia a jej opis

1. A, B; $A \in a$, $B \in b$
2. p; $p = \leftrightarrow SM$
3. $o_{\angle AVB}$; os uhla AVB
4. $O'T'$; $O'T' \perp a$, $O' \in o$, $T' \in a$
5. $k'(O'; |O'T'|)$
6. M', M''; $\{M', M''\} \in p \cap k'$
7. m_1, m_2; $m_1 \parallel O'M'$, $M \in m_1$, $m_2 \parallel O'M''$, $M \in m_2$
8. O_1, O_2; $O_1 \in m_1 \cap o$, $O_2 \in m_2 \cap o$
9. k_1, k_2; $k_1(O_1; |O_1T_1|)$, $k_2(O_2; |O_2T_2|)$



III. Diskusia

Úloha má dve riešenia.

Pr. 12

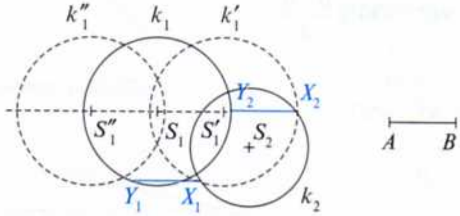
Dané sú dve kružnice $k_1(S_1; r_1)$, $k_2(S_2; r_2)$ a dva rôzne body A, B.
Zostroj úsečku XY rovnobežnú s AB tak, aby bod X ležal na k_2, bod Y na k_1 a aby platilo $|XY| = |AB|$.

I. Rozbor

Výsledkom posúvania určeného orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$ alebo orientovanou úsečkou $\overrightarrow{BA}$ je bod $Y' = X$. Pretože posúvanie je zhodné zobrazenie, je obrazom každej kružnice opäť kružnica zhodná s pôvodnou. Bod X teda leží na kružnici k_2 i na kružnici k_1', ktorá je obrazom kružnice k_1 v uvažovaných posunutiach.

II. Konštrukcia a jej opis

1. k_1'; $T(\overrightarrow{AB})$: $k_1 \to k_1'$
2. k_1''; $T(\overrightarrow{BA})$: $k_1 \to k_1''$
3. X; $X \in k_1' \cap k_2$, $X \in k_1'' \cap k_2$
4. Y; $XY \parallel AB$, $|XY| = |AB|$
5. XY



III. Diskusia

Úloha má v našom prípade dve riešenia. Počet kružníc môže byť aj iný, závisí to od polomeru kružníc, veľkosti úsečky AB i od polohy zadaných kružníc, teda úloha nemusí mať žiadne riešenie, ale môže mať až 4 riešenia.

29. Polohové vlastnosti útvarov v priestore

Obsah kapitoly:

Základné vzťahy medzi bodmi, priamkami a rovinami

Nasledujúce úvahy budú o útvaroch v trojrozmernom priestore. BODY sú prvky priestoru, PRIAMKY a ROVINY podmnožiny. Trojrozmerný priestor označujeme E_3. Vlastnosti útvarov v priestore skúma časť geometrie zvaná STEREOMETRIA.

Hovoríme, že bod A leží (neleží) v priestore E_3 alebo že bod A je (nie je) prvkom priestoru E_3, a píšeme $A \in \mathsf{E}_3$ ($A \notin \mathsf{E}_3$). Hovoríme, že priamka p leží (neleží) v priestore E_3 alebo že priamka p je (nie je) prvkom priestoru E_3, a píšeme $p \subset \mathsf{E}_3$ ($p \not\subset \mathsf{E}_3$). Hovoríme, že rovina ρ leží (neleží) v priestore E_3 alebo že rovina ρ je (nie je) prvkom priestoru E_3, a píšeme $\rho \subset \mathsf{E}_3$ ($\rho \not\subset \mathsf{E}_3$).

Bod leží v rovine, ak leží na niektorej jej priamke.

Priamka leží v rovine, ak v nej ležia jej dva rôzne body.

Každými dvoma rôznymi bodmi je určená jediná priamka.

Každá rovina je jednoznačne určená:

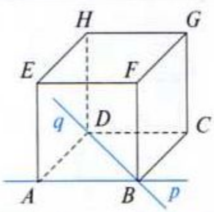
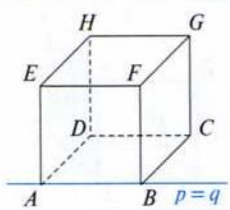
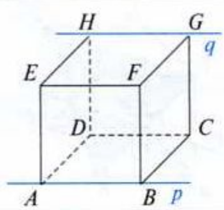
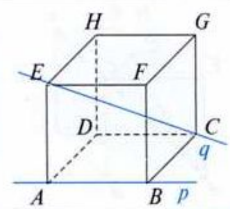
- tromi bodmi, ktoré neležia na jednej priamke,
- priamkou a bodom, ktorý na nej neleží,
- dvoma rôznobežnými priamkami,
- dvoma rôznymi rovnobežnými priamkami.

Rovina ρ rozdelí priestor E_3 na dva navzájom opačné POLPRIESTORY. Táto rovina je HRANICOU (hraničnou rovinou) oboch POLPRIESTOROV. Každý bod priestoru E_3, ktorý neleží v hraničnej rovine, je VNÚTORNÝM BODOM jedného z oboch POLPRIESTOROV. Polpriestor s hraničnou rovinou $\rho = \leftrightarrow ABC$ a vnútorným bodom M označujeme $\rightarrow \rho M$ alebo $\rightarrow ABCM$.

Priamku určenú bodmi A, B označujeme tak, ako v planimetrii $\leftrightarrow AB$ a nazývame ju priamkou AB.

Rovinu určenú bodmi A, B, C ($C \notin \leftrightarrow AB$) nazývame rovinou ABC a označujeme $\leftrightarrow ABC$. Rovinu určenú bodom A a priamkou p ($A \notin p$) nazývame rovinou Ap a označujeme $\leftrightarrow Ap$. Ak sú p, q rôznobežné alebo rovnobežné priamky ($p \neq q$), tak rovinu nimi určenú nazývame rovina pq a označujeme $\leftrightarrow pq$.

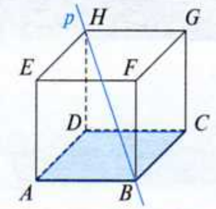
Vzájomná poloha dvoch priamok

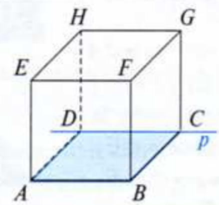
Ak majú dve priamky p a q jediný spoločný bod B, hovoríme, že sú RÔZNOBEŽNÉ (rôznobežky). Bod B je ich PRIESEČNÍKOM. Píšeme $\{B\} = p \cap q$.	Ak majú dve priamky p a q všetky body spoločné, hovoríme, že sú TOTOŽNÉ (splývajú, sú rovnobežné a totožné). Píšeme $p = q$.	Ak nemajú dve priamky p a q žiadny spoločný bod a ležia v jednej rovine, hovoríme, že sú ROVNOBEŽNÉ (rovnobežky). Píšeme $p \parallel q$.	Ak nemajú dve priamky p a q žiadny spoločný bod a neležia v jednej rovine, hovoríme, že sú MIMOBEŽNÉ (mimobežky).
			

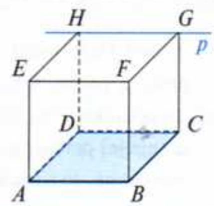
Vzájomnou polohou priamok v rovine a niektorými vzťahmi (odchýlka, kolmosť) medzi nimi sme sa už zaoberali v kapitole č. 24. Tieto vzťahy platia i pre priamky v priestore.

Vzájomná poloha priamky a roviny

Ak majú rovina ↔ *ABC* a priamka *p* jediný spoločný bod *B*, tak rovina ↔ *ABC* a priamka *p* sú **RÔZNOBEŽNÉ**. Bod *B* je ich **PRIESEČNÍK**.	Ak majú rovina ↔ *ABC* a priamka *p* nekonečne veľa spoločných bodov, tak hovoríme, že priamka *p* **LEŽÍ V ROVINE** ↔ *ABC*.	Ak nemajú rovina ↔ *ABC* a priamka *p* žiadny spoločný bod, tak hovoríme, že rovina ↔ *ABC* a priamka *p* sú **ROVNOBEŽNÉ**.



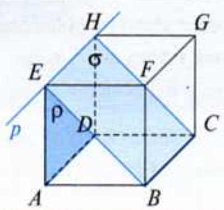


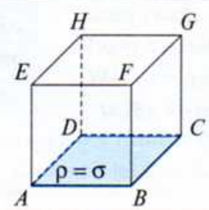


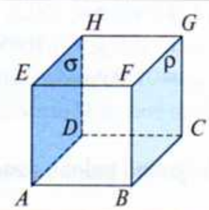
Vzájomná poloha dvoch rovín

Ak majú dve rôzne roviny jeden spoločný bod, tak majú spoločnú priamku, ktorá prechádza týmto bodom; okrem bodov tejto priamky nemajú už žiadny ďalší spoločný bod.

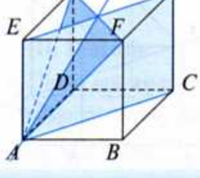
Ak majú dve rôzne roviny ρ a σ spoločnú priamku *p*, hovoríme, že roviny ρ a σ sú **RÔZNOBEŽNÉ**. Priamka *p* je ich **PRIESEČNICA**. Píšeme $p = \rho \cap \sigma$.	Ak majú dve roviny ρ a σ všetky body spoločné, hovoríme, že roviny ρ a σ sú **TOTOŽNÉ** (splývajú, sú rovnobežné a totožné). Píšeme $\rho = \sigma$.	Ak nemajú dve roviny ρ a σ žiadny spoločný bod, hovoríme, že roviny ρ a σ sú **ROVNOBEŽNÉ**. Píšeme $\rho \parallel \sigma$.



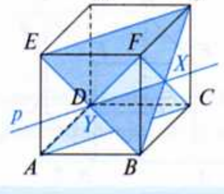




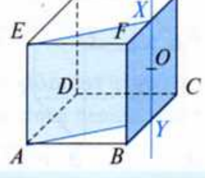
Pr. 1 Zostroj priesečnicu rovín *ACG* a *AFH* v kocke *ABCDEFGH*.



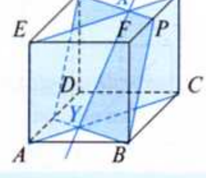
Pr. 2 Zostroj priesečnicu rovín *ACF* a *BEG* v kocke *ABCDEFGH*.



Pr. 3 Zostroj priesečnicu rovín *BCG* a *AEO* v kocke *ABCDEFGH*. Bod *O* je stred steny *BCGF*.



Pr. 4 Zostroj priesečnicu rovín *ACE* a *BHP* v kocke *ABCDEFGH*. Bod *P* je stred hrany *FG*.



Rovnobežnosť priamok a rovín

Daným bodom môžeme viesť k danej priamke jedinú rovnobežku.

Priamka p je rovnobežná s rovinou ρ, ak v rovine existuje aspoň jedna priamka q, ktorá je s priamkou p rovnobežná.

Ak je priamka rovnobežná s dvoma rôznobežnými rovinami, tak je rovnobežná aj s ich priesečnicou.

Dve roviny ρ a σ sú rovnobežné, ak jedna z nich, napr. σ, obsahuje dve rôznobežné priamky, ktoré sú rovnobežné s rovinou ρ.

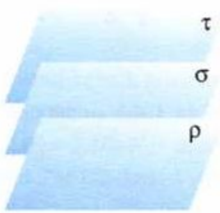
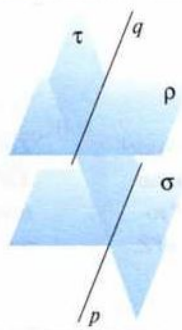
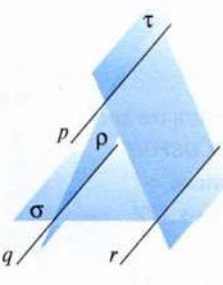
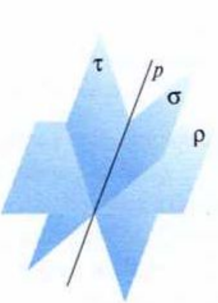
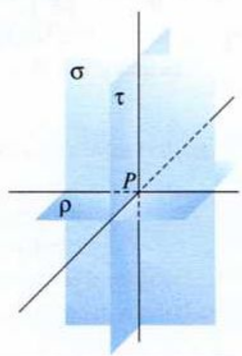
Daným bodom môžeme viesť k danej rovine jedinú rovinu s ňou rovnobežnú.

> Rovnobežnosť priamok je vzťah tranzitívny, čiže ak $p \parallel q$, $q \parallel r$, tak aj $p \parallel r$.

> Rovnobežnosť rovín je vzťah tranzitívny, čiže ak $\rho \parallel \sigma$, $\sigma \parallel \tau$, tak aj $\rho \parallel \tau$.

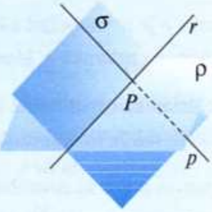
Vzájomná poloha troch rovín

Na nasledujúcich obrázkoch sú znázornené všetky možnosti vzájomnej polohy troch rôznych rovín.

Každé dve roviny sú rovnobežné, nemajú spoločný bod.	Dve roviny sú rovnobežné a tretia ich pretína v rovnobežných priamkach.	Každé dve roviny sú rôznobežné, priesečnice každých dvoch rovín sú rovnobežné a rôzne.
		
Každé dve roviny sú rôznobežné a ich priesečnice sú totožné.	Všetky tri roviny majú spoločný jediný bod P.	
		

Polohové konštrukčné úlohy

REZ TELESA ROVINOU je rovinný útvar, ktorého hranicou je prienik stien telesa a roviny rezu. Zostrojiť rez telesa rovinou znamená zostrojiť priesečnice danej roviny s rovinami, v ktorých ležia jednotlivé steny telesa. Využívame pritom všetky vety uvedené v tejto kapitole.

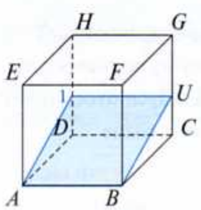


Ak je priamka p rôznobežná s rovinou ρ, tak PRIESEČNÍK PRIAMKY S ROVINOU zostrojíme takto:

1. priamkou p preložíme vhodnú rovinu σ, ktorá je s rovinou ρ rôznobežná,
2. určíme priesečnicu r, ktorá je priesečnicou rovín ρ a σ,
3. priesečník priamok p a r je hľadaný priesečník P priamky p a roviny ρ.

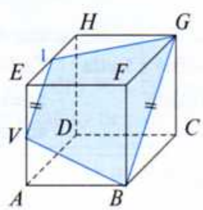
Pr. 5

Zostroj rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou $\rho = \leftrightarrow ABU$.



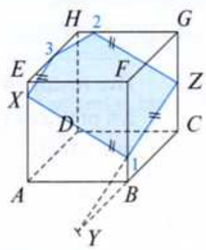
Pr. 6

Zostroj rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou $\rho = \leftrightarrow BGV$.



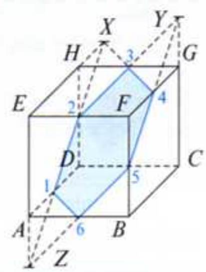
Pr. 7

Zostroj rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou $\rho = \leftrightarrow XYZ$.



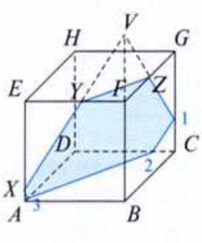
Pr. 8

Zostroj rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou $\rho = \leftrightarrow XYZ$.



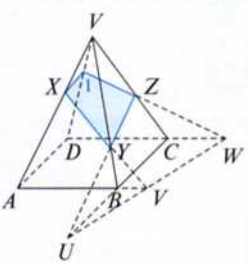
Pr. 9

Zostroj rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou $\rho = \leftrightarrow XYZ$.



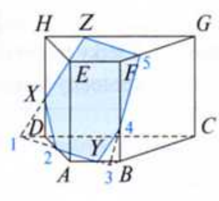
Pr. 10

Zostroj rez pravidelného štvorbokého ihlana $ABCDV$ rovinou $\rho = \leftrightarrow XYZ$.



Pr. 11

Zostroj rez hranola $ABCDEFGH$ rovinou $\rho = \leftrightarrow XYZ$.



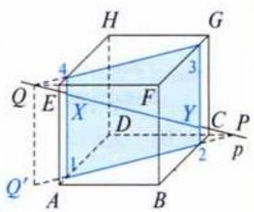
PRIENIK PRIAMKY S TELESOM zostrojíme takto:

1. priamkou preložíme vhodnú rovinu,
2. určíme rez telesa touto rovinou,
3. prienik priamky a rezu je hľadaným prienikom priamky s telesom.

Ak je telesom hranol, tak zvyčajne prekladáme rovinu rovnobežnú s bočnými hranami (šikmý hranol) alebo rovinu kolmú na rovinu podstavy hranola.
Ak je telesom ihlan, prekladáme rovinu kolmú na rovinu podstavy alebo rovinu prechádzajúcu vrcholom ihlana.

Pr. 12

Zostroj prienik priamky $p = \leftrightarrow PQ$ a kocky $ABCDEFGH$.

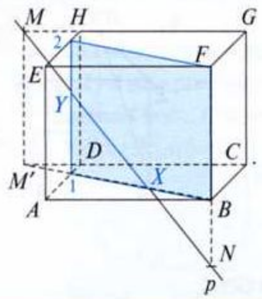


Pr. 13

Zostroj prienik priamky $p = \leftrightarrow MN$ s kvádrom $ABCDEFGH$, ak je dané:

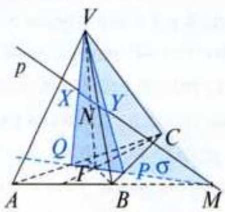
$|AB| = 5$ cm, $|BC| = 3$ cm, $|AE| = 4$ cm, $M \in \mapsto GH$, $|MG| = \frac{4}{3}|GH|$,

$N \in \mapsto FB$, $|NF| = \frac{3}{2}|BF|$.



Pr. 14

Zostroj prienik priamky $p = \leftrightarrow MN$ a trojbokého ihlana $ABCV$, ak je dané: $M \in \mapsto AB$, $|AM| = 2|AB|$, N je stredom úsečky TV, bod T je ťažiskom $\Delta\ ABC$.



Priečka mimobežiek

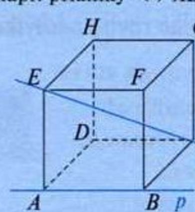
PRIEČKA MIMOBEŽIEK je priamka, ktorá obe mimobežky pretína. Niekedy týmto menom označujeme úsečky s krajnými bodmi na oboch mimobežkách.

Ak určujeme priečku mimobežiek, ktorá prechádza daným bodom, môžeme postupovať takto:

1. jednou z mimobežiek a daným bodom preložíme rovinu,
2. určíme priesečník tejto roviny s druhou mimobežkou,
3. priamka, ktorá spája priesečník a daný bod (ak nie je rovnobežná s prvou mimobežkou, vtedy priečka neexistuje), je hľadaná priečka.

Každé dve mimobežné priamky majú nekonečne veľa priečok.

Priečkami mimobežiek p, q na obrázku sú napr. priamky $\leftrightarrow AE$, $\leftrightarrow BC$.



30. Metrické vlastnosti útvarov v priestore

Obsah kapitoly:

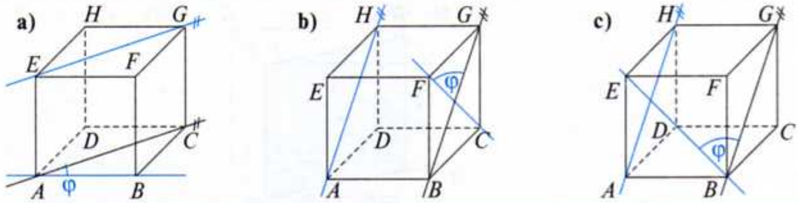
Odchýlka priamok

METRICKÝMI VLASTNOSŤAMI útvarov nazývame odchýlky a vzdialenosti týchto útvarov. Pomocou nich presnejšie vyjadrujeme priestorové vzťahy.

- ODCHÝLKA DVOCH RÔZNOBEŽNÝCH PRIAMOK je veľkosť každého z ostrých alebo pravých uhlov, ktorý priamky spolu zvierajú.
- ODCHÝLKA DVOCH ROVNOBEŽNÝCH PRIAMOK je 0°.
- ODCHÝLKA DVOCH MIMOBEŽNÝCH PRIAMOK je odchýlka rôznobežných priamok vedených ľubovoľným bodom priestoru rovnobežne s danými mimobežkami.

Pr. 1

Daná je kocka $ABCDEFGH$. Urči graficky odchýlky priamok: **a)** AB, EG **b)** AH, CF **c)** AH, BE



Uhol φ nemá v obrázkoch skutočnú veľkosť.

Kolmosť priamok a rovín

- Dve PRIAMKY SÚ navzájom KOLMÉ práve vtedy, keď ich odchýlka je 90°. Kolmosť priamok p a q zapisujeme $p \perp q$.
- PRIAMKA A ROVINA SÚ navzájom KOLMÉ práve vtedy, keď je priamka kolmá na všetky priamky roviny. Kolmosť priamky p a roviny ρ zapisujeme $p \perp \rho$. Priamka kolmá na rovinu sa nazýva KOLMICA NA ROVINU. Bod P, $\{P\} = p \cap \rho$, je PÄTA KOLMICE.
  Ak je priamka kolmá na dve rôznobežky roviny, tak je kolmá aj na rovinu.
  Daným bodom môžeme viesť na danú rovinu jedinú kolmicu.
- Dve ROVINY SÚ navzájom KOLMÉ práve vtedy, keď jedna z nich obsahuje priamku kolmú na druhú rovinu.

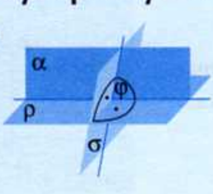
V stereometri môžu byť navzájom kolmé aj mimobežné priamky.

Ak je $p \perp \rho$ a $q \perp \rho$, tak je $p \parallel q$.
Ak je $p \perp \rho$ a $p \parallel q$, tak je $q \perp \rho$.
Ak je $p \perp \rho$ a $p \perp \sigma$, tak je $\rho \parallel \sigma$.
Ak je $p \perp \rho$ a $\rho \parallel \sigma$, tak je $p \perp \sigma$.

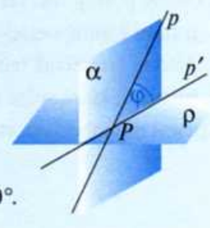
Ak je ρ ľubovoľná rovina a A ľubovoľný bod ($A \notin \rho$), tak PRAVOUHLÝM PRIEMETOM BODU A DO ROVINY ρ je päta A' kolmice vedenej bodom A na rovinu ρ. Priamkou p, ktorá nie je kolmá na rovinu ρ, prechádza práve jedna rovina α kolmá na rovinu ρ. Priesečnica rovín α a ρ je priamka p', ktorá je tzv. PRAVOUHLÝM PRIEMETOM PRIAMKY p DO ROVINY ρ.

Odchýlka rovín, odchýlka priamky a roviny

- ODCHÝLKA dvoch ROVÍN ρ, σ je odchýlka ich priesečníc s rovinou α, ktorá je kolmá na obidve roviny.

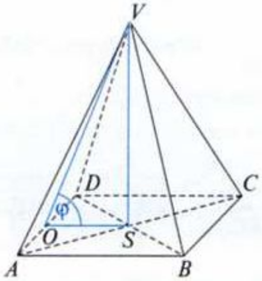


- ODCHÝLKA PRIAMKY p A ROVINY ρ je rovnaká ako odchýlka priamky a jej pravouhlého priemetu p' do tejto roviny. Odchýlka priamky a roviny, ktorá je na ňu kolmá, je 90°.



Pr. 2

Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$, pričom $|AB| = a = 5$ cm a $|AV| = b = 7$ cm.
Urči odchýlku φ bočnej steny a roviny podstavy.



$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|SV|}{|OS|} = \frac{v}{\frac{a}{2}} = \frac{2v}{a}$$

Zapíšeme vzťah platiaci pre uhol α v pravouhlom $\Delta\, OSV$.

$$|AS| = \frac{a\sqrt{2}}{2}, |AV| = b$$

Úsečka AS má dĺžku poloviny uhlopriečky podstavy.

$$v = |SV| = \sqrt{|AV|^2 - |AS|^2} = \sqrt{\frac{2b^2 - a^2}{2}}$$

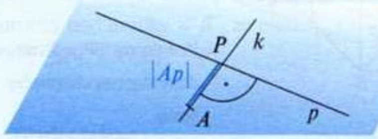
Zapíšeme Pytagorovu vetu pre $\Delta\, ASV$.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{2b^2 - a^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{a}\sqrt{2b^2 - a^2} \Rightarrow \varphi \doteq 67°31'$$

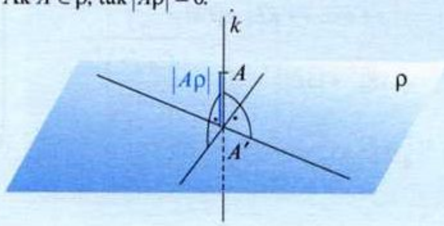
Vzdialenosť bodu od priamky a od roviny

- **VZDIALENOSŤ BODOV** A, B je dĺžka úsečky AB. Označujeme ju $|AB|$.

- **VZDIALENOSŤ BODU OD PRIAMKY** v priestore určíme tak, ako vzdialenosť bodu od priamky v rovine, pretože bod a priamka (ktorá ním neprechádza) určujú rovinu. Vzdialenosť bodu A od priamky p označujeme $|Ap|$. Ak $A \in p$, tak $|Ap| = 0$.

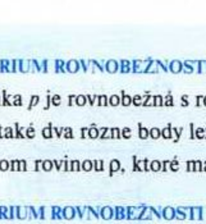


- **VZDIALENOSŤ BODU A OD ROVINY** ρ je vzdialenosť bodu A od jeho pravouhlého priemetu A' do roviny ρ. Vzdialenosť bodu A od roviny ρ označujeme $|A\rho|$. Ak $A \in \rho$, tak $|A\rho| = 0$.



Pr. 3

Urč vzdialenosť bodu E od roviny AFH v kocke $ABCDEFGH$ s dĺžkou hrany $a = 5$ cm.



$$\sin\alpha = \frac{|ES|}{|AS|} = \frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Zapíšeme vzťah platiaci pre uhol $\alpha = \sphericalangle EAS$ v pravouhlom $\Delta\, ASE$ (pravý uhol je pri E).

$$\sin\alpha = \frac{|EP|}{|AE|} = \frac{|EP|}{a} = \frac{|EP|}{5}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{|EP|}{5} \Rightarrow |EP| = \frac{5\sqrt{3}}{3} \doteq 2{,}89 \text{ cm}$$

Zapíšeme vzťah platiaci v pravouhlom $\Delta\, AEP$ (pravý uhol je pri P).
Oba vzťahy porovnáme.

KRITÉRIUM ROVNOBEŽNOSTI PRIAMKY A ROVINY

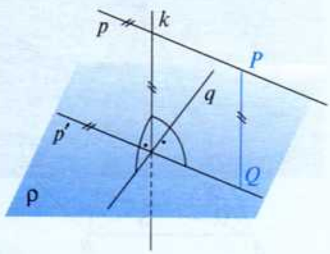
Priamka p je rovnobežná s rovinou ρ, ak sa na priamke p dajú nájsť také dva rôzne body ležiace v tom istom polpriestore určenom rovinou ρ, ktoré majú od roviny ρ rovnakú vzdialenosť.

KRITÉRIUM ROVNOBEŽNOSTI DVOCH ROVÍN

Dve roviny ρ a σ sú rovnobežné, ak sa v rovine σ dajú nájsť také tri rôzne body neležiace na jednej priamke a patriace tomu istému polpriestoru určenému rovinou ρ, ktoré majú od roviny ρ rovnakú vzdialenosť.

Vzdialenosť priamok a rovín

- VZDIALENOSŤ dvoch rovnobežných PRIAMOK je vzdialenosť ľubovoľného bodu jednej priamky od druhej priamky. Vzdialenosť priamok p, q označujeme $|pq|$.
- VZDIALENOSŤ dvoch rovnobežných ROVÍN je vzdialenosť ľubovoľného bodu jednej roviny od druhej roviny. Vzdialenosť rovín ρ, σ označujeme $|\rho\sigma|$.
- VZDIALENOSŤ PRIAMKY OD ROVINY s ňou rovnobežnej je vzdialenosť ľubovoľného bodu priamky od tejto roviny. Vzdialenosť priamky p od roviny ρ označujeme $|p\rho|$.
- VZDIALENOSŤ mimobežných PRIAMOK p, q je dĺžka úsečky PQ, pričom body P, Q sú priesečníky mimobežiek p, q s tou ich priečkou, ktorá je na obe mimobežky kolmá. Vzdialenosť priamok p, q označujeme $|pq|$.



Pr. 4

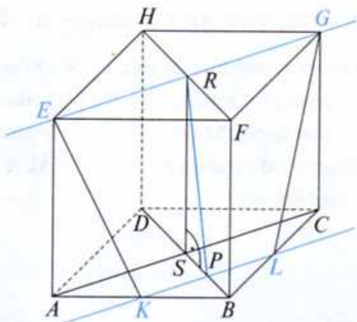
Urč vzdialenosť priamok $\leftrightarrow EG$ a $\leftrightarrow KL$ v kocke $ABCDEFGH$ s hranou $a = 5$ cm. Body K, L sú stredy hrán AB a BC.

$EG \parallel KL, |EK| = |GL|$

$|\leftrightarrow EG, \leftrightarrow KL| = |PR| =$

$= \sqrt{|SR|^2 + |SP|^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2}$

$= \frac{3}{4}a\sqrt{2} = \frac{3}{4}\cdot 5\sqrt{2} \doteq 5{,}3$ cm



Odtiaľ vyplýva, že útvar $EKLG$ je rovnoramenný lichobežník.

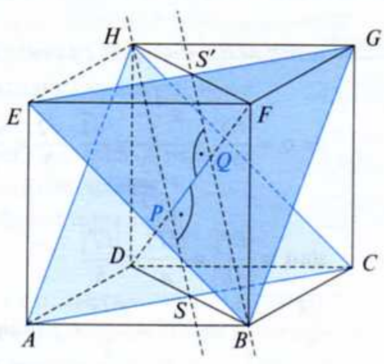
Vzdialenosť $|SP|$ je štvrtinou dĺžky stenovej uhlopriečky kocky.

Pr. 5

Urč vzdialenosť rovín ACH a BEG v kocke $ABCDEFGH$; s hranou $a = 5$ cm.

$|\leftrightarrow ACH, \leftrightarrow BEG| = |PQ| =$

$= \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \doteq 2{,}89$ cm

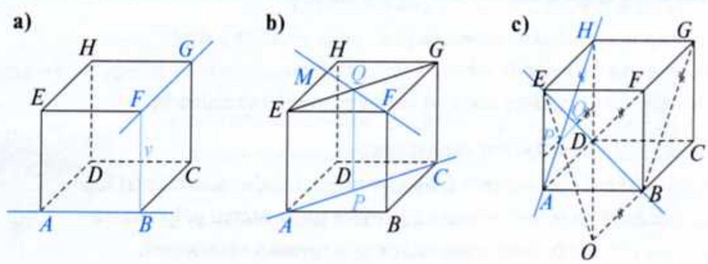


Dá sa dokázať, že telesová uhlopriečka DF je rovinami ACH a BEG rozdelená na tretiny, $|DP| = |PQ| = |QF|$. Vzdialenosť rovín je potom tretina dĺžky telesovej uhlopriečky kocky (pozri príklad č. 3).

Pr. 6

Daná je kocka $ABCDEFGH$, bod M je bodom hrany EH. Urč graficky vzdialenosť mimobežiek:

a) AB a FG,
b) AC a FM,
c) AH a BE.



31. Telesá

Obsah kapitoly:

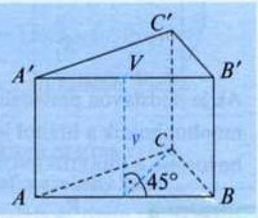
Zobrazovanie telies

Budeme sa zaoberať len najzákladnejšími telesami, s ktorými sa počas štúdia na strednej škole stretávame.

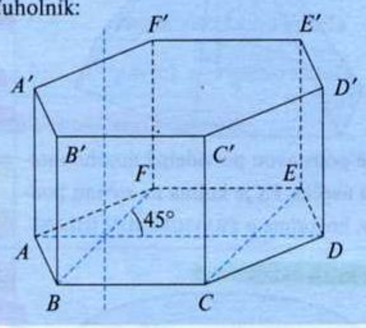
V stereometrii graficky znázorňujeme telesá pomocou zobrazenia nazývaného VOĽNÉ ROVNOBEŽNÉ PREMIETANIE:

- rovinné obrazce, ktoré ležia v rovinách rovnobežných s nákresňou, sa zobrazujú v skutočnej veľkosti (prípadne v danej mierke) a v skutočnom tvare;
- rovnobežné priamky sa zobrazia opäť ako rovnobežky (resp. ako dva body či jedna priamka), priamky kolmé na nákresňu sa zobrazia ako šikmé, obvykle tak, že zvierajú s vodorovným smerom uhol 45°;
- rovnobežné a zhodné úsečky sa zobrazia opäť ako rovnobežné a zhodné úsečky, úsečky kolmé na nákresňu sa obvykle skracujú na polovinu;
- ak je obrazom úsečky AB úsečka $A'B'$ a ak bod C je vnútorným bodom úsečky AB, tak jeho obraz C' je taký vnútorný bod úsečky $A'B'$, že platí $|A'C'|:|B'C'| = |AC|:|BC|$.

Znázornenie pravidelného trojbokého hranola, ktorého podstavou je rovnostranný trojuholník:

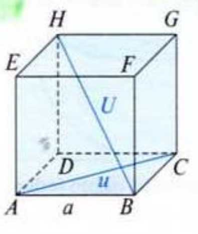
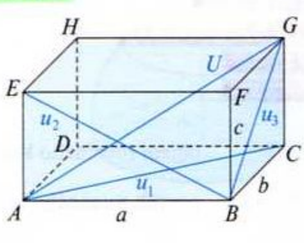


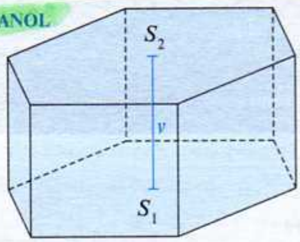
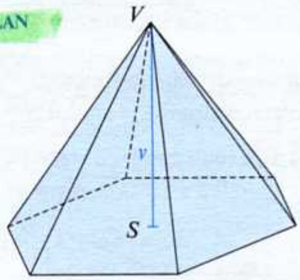
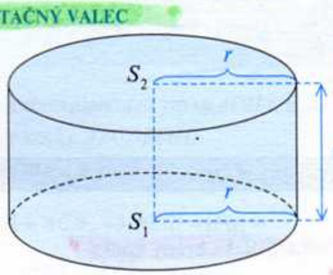
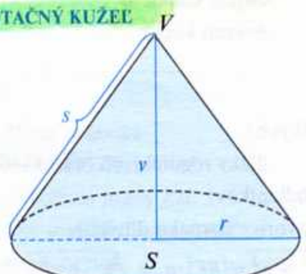
Znázornenie pravidelného šesťbokého hranola, ktorého podstavou je pravidelný šesťuholník:

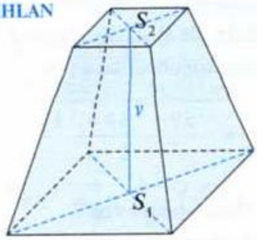
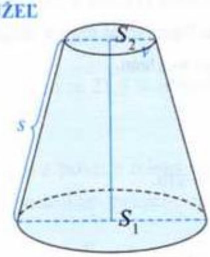
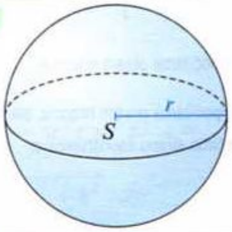
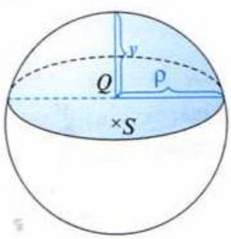
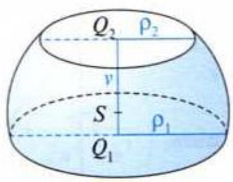


Druhy telies

Tabuľka základných telies, ich charakteristických vlastností, vzťahy pre objem a povrch jednotlivých telies:

TELESÁ	VLASTNOSTI TELIES
KOCKA 	8 vrcholov 12 hrán (rovnako dlhých), $a = \|AB\|$ dĺžka hrany kocky 6 stien (zhodné štvorce) 12 stenových uhlopriečok (rovnako dlhých), $u = a\sqrt{2} = \|AC\|$ 4 telesové uhlopriečky (rovnako dlhé), $U = a\sqrt{3} = \|BH\|$ $V = a^3$ objem kocky $S = 6a^2$ povrch kocky
KVÁDER 	8 vrcholov 12 hrán (tri štvorice rovnako dlhých), $a = \|AB\|,\ b = \|BC\|,\ c = \|CG\|$ dĺžky rozdielnych hrán kvádra 6 stien (tri dvojice zhodných obdĺžnikov) 12 stenových uhlopriečok (tri štvorice rovnako dlhých), $u_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = \|AC\|,\ u_2 = \sqrt{a^2 + c^2} = \|BE\|,\ u_3 = \sqrt{b^2 + c^2} = \|BG\|$ 4 telesové uhlopriečky (rovnako dlhé), $U = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \|AG\|$ $V = abc$ objem kvádra $S = 2(ab + ac + bc)$ povrch kvádra

TELESÁ	VLASTNOSTI TELIES
HRANOL  Ak je podstavou pravidelný mnohouholník a hranol je kolmý, hovoríme o **PRAVIDELNOM HRANOLE**.	Podstavou je mnohouholník $A_1A_2...A_n$. $2n$ vrcholov, $2n$ podstavných hrán, n bočných hrán 2 podstavy, n bočných stien (obdĺžnikov, ak je kolmý) S_p obsah podstavy hranola S_{pl} obsah plášťa hranola (súčet obsahov všetkých bočných stien) v výška hranola (vzdialenosť rovín podstáv) $V = S_p \cdot v$ objem hranola $S = 2S_p + S_{pl}$ povrch hranola
IHLAN  Ak je podstavou pravidelný mnohouholník a úsečka VS je kolmá na rovinu podstavy, hovoríme o **PRAVIDELNOM IHLANE**.	Podstavou je mnohouholník $A_1A_2...A_n$. n vrcholov podstavy, n podstavných hrán, n bočných hrán n bočných stien (trojuholníkov) S_p obsah podstavy ihlana S_{pl} obsah plášťa ihlana (súčet obsahov všetkých bočných stien) V vrchol ihlana v výška ihlana (vzdialenosť vrcholu od roviny podstavy) $V = \frac{1}{3}S_p \cdot v$ objem ihlana $S = S_p + S_{pl}$ povrch ihlana
ROTAČNÝ VALEC  Ak je osovým rezom valca štvorec, t. j. $v = 2r$, hovoríme o **ROVNOSTRANNOM VALCI**.	Vznikne otáčaním obdĺžnika okolo jednej jeho strany. v výška valca r polomer podstavy valca S_p obsah podstavy valca S_{pl} obsah plášťa valca $V = S_p \cdot v = \pi r^2 v$ objem rotačného valca $S = 2S_p + S_{pl} = 2\pi r^2 + 2\pi rv = 2\pi r(r+v)$ povrch rotačného valca
ROTAČNÝ KUŽEĽ  Ak je osovým rezom kužeľa rovnostranný trojuholník, t. j. $s = 2r$, $v = r\sqrt{3}$, hovoríme o **ROVNOSTRANNOM KUŽELI**.	Vznikne otáčaním pravouhlého trojuholníka okolo jednej jeho odvesny. v výška kužeľa r polomer podstavy kužeľa s dĺžka strany kužeľa, $s = \sqrt{r^2 + v^2}$ S_p obsah podstavy kužeľa S_{pl} obsah plášťa kužeľa $V = \frac{1}{3}S_p \cdot v = \frac{1}{3}\pi r^2 v$ objem rotačného kužeľa $S = S_p + S_{pl} = \pi r^2 + \pi rs = \pi r(r+s)$ povrch rotačného kužeľa

TELESÁ	VLASTNOSTI TELIES
ZREZANÝ IHLAN 	Rovina rovnobežná s rovinou podstavy, ktorá pretína výšku ihlana, rozdelí daný ihlan na menší ihlan a zrezaný ihlan. v výška zrezaného ihlana (vzdialenosť rovín podstáv) S_{p1}, S_{p2} obsah dolnej a hornej podstavy S_{pl} obsah plášťa $V = \frac{v}{3}\cdot\left(S_{p1} + \sqrt{S_{p1}S_{p2}} + S_{p2}\right)$ objem zrezaného ihlana $S = S_{p1} + S_{p2} + S_{pl}$ povrch zrezaného ihlana
ZREZANÝ KUŽEĽ 	Rovina rovnobežná s rovinou podstavy, ktorá pretína výšku kužeľa, rozdelí daný kužeľ na menší kužeľ a zrezaný kužeľ. v výška zrezaného kužeľa (vzdialenosť rovín podstáv) s dĺžka strany S_{p1}, S_{p2} obsah dolnej a hornej podstavy S_{pl} obsah plášťa $V = \frac{\pi v}{3}\cdot\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$ objem zrezaného kužeľa $S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi(r_1 + r_2)s$ povrch zrezaného kužeľa
GUĽA 	Vznikne otáčaním polkruhu okolo jeho priemeru. r polomer gule S stred gule $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ objem gule $S = 4\pi r^2$ povrch gule
GUĽOVÝ ODSEK 	Rovina prechádzajúca vnútorným bodom priemeru gule rozdelí guľu na dva guľové odseky. v výška odseku r polomer gule ρ polomer podstavy odseku Q stred podstavy odseku S_p obsah podstavy odseku S_{pl} obsah guľového vrchlíka, $S_{pl} = 2\pi rv$ $V = \frac{\pi v}{6}(3\rho^2 + v^2)$ objem guľového odseku $S = S_p + S_{pl} = \pi\rho^2 + 2\pi rv$ povrch guľového odseku
GUĽOVÁ VRSTVA 	Guľová vrstva je prienik gule a vrstvy ohraničenej dvoma rovnobežnými rovinami. v výška guľovej vrstvy r polomer gule ρ_1, ρ_2 polomer dolnej a hornej podstavy vrstvy Q_1, Q_2 stred dolnej a hornej podstavy vrstvy S_{p1}, S_{p2} obsah dolnej a hornej podstavy vrstvy S_{pl} obsah guľového pásu, $S_{pl} = 2\pi rv$ $V = \frac{\pi v}{6}(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2)$ objem guľovej vrstvy $S = S_{p1} + S_{p2} + S_{pl} = \pi(\rho_1^2 + \rho_2^2) + 2\pi rv$ povrch guľovej vrstvy

Riešené príklady

Pri riešení príkladov o telesách nevyužívame len vzťahy uvedené v tejto kapitole, ale aj vzťahy uvedené v predchádzajúcich kapitolách (vzťahy pre obvody a obsahy, vety o pravouhlom trojuholníku a pod.).

Pr. 1

Kváder má objem 7,5 dm^3 a rozmery v pomere 3 : 4 : 5.
Vypočítaj jeho povrch a dĺžku telesovej uhlopriečky.

$V = 7{,}5 \text{ dm}^3 = 7\,500 \text{ cm}^3$ — Objem vyjadríme v cm^3.

$a : b : c = 3 : 4 : 5$, tj. $a = 3k,\ b = 4k,\ c = 5k$ — Vyjadríme dĺžky hrán.

$7\,500 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot k^3$ — Dosadíme za objem a hrany do vzorca pre objem.

$k = 5$ — Vypočítame koreň rovnice, dosadíme do vyjadrenia hrán.

$a = 15 \text{ cm},\ b = 20 \text{ cm},\ c = 25 \text{ cm}$

$S = 2(ab + bc + ac) = 2(15 \cdot 20 + 20 \cdot 25 + 15 \cdot 25) = 2\,350 \text{ cm}^2$

$U = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{15^2 + 20^2 + 25^2} = 25\sqrt{2} \doteq 35{,}4 \text{ cm}$

Kváder má povrch 2 350 cm^2 a jeho telesová uhlopriečka má dĺžku 35,4 cm.

Pr. 2

Urč objem a povrch kolmého štvorbokého hranola s výškou $v = 32$ cm, ktorého podstavou je kosoštvorec s uhlopriečkami $e = 11{,}2$ cm, $f = 6{,}6$ cm.

$$V = S_p \cdot v = \frac{e \cdot f}{2} \cdot v = \frac{11{,}2 \cdot 6{,}6}{2} \cdot 32 = 1\,182{,}72 \text{ cm}^3$$

Vypočítame objem hranola.

$$S = 2S_p + S_{pl} = 2 \cdot \frac{e \cdot f}{2} + 4a \cdot v$$

Vypočítame povrch hranola, ale najprv určíme stranu kosoštvorca a.

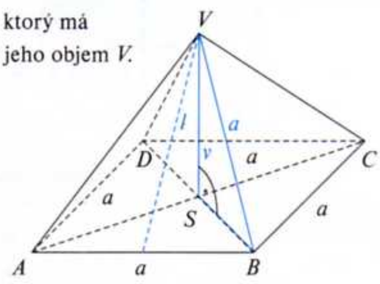
$$a = \sqrt{\left(\frac{11{,}2}{2}\right)^2 + \left(\frac{6{,}6}{2}\right)^2} = 6{,}5 \text{ cm}$$

$$S = 2 \cdot \frac{e \cdot f}{2} + 4a \cdot v = 11{,}2 \cdot 6{,}6 + 4 \cdot 6{,}5 \cdot 32 = 905{,}92 \text{ cm}^2$$

Hranol má objem 1 182,72 cm^3 a povrch 905,92 cm^2.

Pr. 3

Vypočítaj dĺžku hrán a povrch pravidelného štvorbokého ihlana, ktorý má všetky hrany rovnako dlhé (bočné aj hrany podstavy), ak je daný jeho objem V.



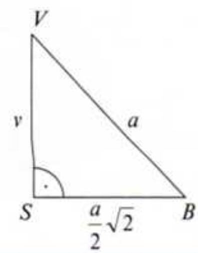
$V = \frac{1}{3}a^2 v,\ S = a^2 + 4 \cdot S_{\Delta ABV}$ — Zapíšeme vzťahy pre objem a povrch.

$v = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ — Vypočítame výšku ihlana a dosadíme ju do vzorca pre objem.

$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

$a = \sqrt[3]{\frac{6V}{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\frac{6V\sqrt{2}}{2}} = \sqrt[3]{3V\sqrt{2}}$ — Z predchádzajúceho vzťahu vyjadríme dĺžku hrany a.

$l = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ — Určíme výšku steny ihlana. Vzťah vyplýva z toho, že $\Delta\, ABV$ je rovnostranný.



$$S = a^2 + 4\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = a^2 + a^2\sqrt{3} = a^2(1 + \sqrt{3}) = \sqrt[3]{18V^2} \cdot (1 + \sqrt{3})$$

Dĺžka hrany ihlana $a = \sqrt[3]{3V\sqrt{2}}$ a povrch ihlana $S = \sqrt[3]{18V^2} \cdot (1 + \sqrt{3})$.

Pr. 4

Do gule je vpísaný kváder, ktorého rozmery sú v pomere 1 : 2 : 3. Vypočítaj, koľko percent objemu gule tvorí objem tohto kvádra.

$a = k,\ b = 2k,\ c = 3k$

Vyjadríme rozmery kvádra.

$V_{kv} = abc = 6k^3$

Určíme objem kvádra.

$R = \frac{U}{2} = \frac{\sqrt{k^2 + 4k^2 + 9k^2}}{2} = \frac{k}{2}\sqrt{14}$

Vypočítame polomer gule, ktorý sa rovná polovine veľkosti telesovej uhlopriečky kvádra U.

$V_g = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{k^3}{8} \cdot \left(\sqrt{14}\right)^3 = \frac{4 \cdot 14}{3 \cdot 8}\pi k^3 \sqrt{14} = \frac{7}{3}\pi k^3 \sqrt{14}$

Vypočítame objem gule.

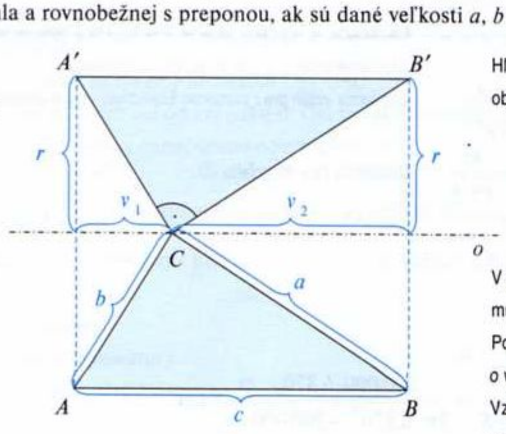
$$\left.\begin{array}{ll} V_g = \frac{7}{3}\pi k^3 \sqrt{14} \ \ldots\ldots & 100\ \% \\ V_{kv} = 6k^3 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & x\ \% \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{6k^3}{\frac{7}{3}\pi k^3 \sqrt{14}} \cdot 100 \doteq 21{,}9\ \%$$

Vypočítame počet percent, ktoré zaberá kváder.

Objem kvádra je 21,9 % objemu gule.

Pr. 5

Urči objem a povrch telesa, ktoré vznikne otáčaním pravouhlého trojuholníka ABC okolo osi prechádzajúcej vrcholom pravého uhla a rovnobežnej s preponou, ak sú dané veľkosti a, b odvesien ΔABC.



Hľadaný objem je rozdiel objemu valca a dvoch kužeľov.

$V = V_v - V_{k1} - V_{k2} =$

$= \pi r^2 c - \frac{1}{3}\pi r^2 v_1 - \frac{1}{3}\pi r^2 v_2 =$

$= \pi r^2 c - \frac{1}{3}\pi r^2 (v_1 + v_2) =$

$= \pi r^2 c - \frac{1}{3}\pi r^2 c = \frac{2}{3}\pi r^2 c =$

$= \frac{2}{3}\pi r^2 \sqrt{a^2 + b^2}$

V poslednom vzťahu musíme vyjadriť r. Použitím Euklidovej vety o výške vyjadríme r. Vzťahy pre v_1, v_2 vyplývajú z obrázka. Dosadíme ich do Euklidovej vety.

$v_1 \cdot v_2 = r^2$

$v_2 = \sqrt{a^2 - r^2}$

$v_1 = \sqrt{b^2 - r^2}$

$\sqrt{b^2 - r^2} \cdot \sqrt{a^2 - r^2} = r^2 \quad /^2$

$(b^2 - r^2) \cdot (a^2 - r^2) = r^4$

$b^2 a^2 - r^2 a^2 - r^2 b^2 + r^4 = r^4$

$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$

Dosadíme za r^2 do vzorca pre objem.

$V = \frac{2}{3}\pi \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{2\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2 + b^2}}$

$S = 2\pi rc + \pi r s_1 + \pi r s_2 = 2\pi r\sqrt{a^2 + b^2} + \pi ra + \pi rb =$

$= \pi r(2\sqrt{a^2 + b^2} + a + b) = \frac{\pi ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}(2\sqrt{a^2 + b^2} + a + b) =$

$= \pi ab\left(2 + \frac{a + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$

Povrch telesa sa skladá z plášťa valca a plášťov dvoch kužeľov.

Objem telesa je $V = \frac{2\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2 + b^2}}$ a má povrch $S = \pi ab\left(2 + \frac{a + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$.

Pr. 6

Zrezaný rotačný kužeľ má polomery podstáv a výšku v pomere 3 : 11 : 15, povrch $S = 92\pi\ \text{cm}^2$. Vypočítaj jeho objem.

$r_1 : r_2 : v = 3 : 11 : 15,\ r_1 = 3k,\ r_2 = 11k,\ v = 15k$ — Vyjadríme polomery podstáv a výšky.

$s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + v^2} = \sqrt{64k^2 + 225k^2} = 17k$ — Vypočítame stranu kužeľa.

$92\pi = \pi 9k^2 + \pi 121k^2 + \pi k^2 14 \cdot 17$ — Dosadíme do vzorca pre povrch $S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi(r_1 + r_2)s$ a vypočítame k.

$k^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$ — Koreň $k = -\frac{1}{2}$ nevyhovuje, pretože dĺžky strán sú kladné čísla. Dosadíme za k do vzťahu pre polomery podstáv, výšku a stranu kužeľa.

$r_1 = \frac{3}{2},\ r_2 = \frac{11}{2},\ v = \frac{15}{2},\ s = \frac{17}{2}$

$V = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \doteq 320\ \text{cm}^2$ — Vypočítame objem kužeľa.

Objem kužeľa $V = 320\ \text{cm}^2$.

Pr. 7

Urči, z akej výšky uvidí letec povrch Zeme s rozlohou $200\ 000\ \text{km}^2$.

Na obrázku je rez celej situácie. Plocha, ktorú letec uvidí, je obsahom guľového vrchlíka.

$S = 2\pi r v$ ① — Zapíšeme vzťah pre povrch guľového vrchlíka.

$(r - v)\cdot(r + h) = r^2$ — Zapíšeme vzťah pre r pomocou Euklidovej vety o odvesne.

$r^2 - vr + rh - vh = r^2$

$v = \frac{hr}{r+h}$ — Dosadíme za v do vzťahu ①.

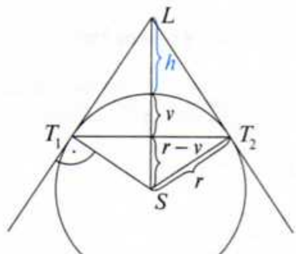
$S = 2\pi r \frac{hr}{r+h}$

$S(r+h) = 2\pi h r^2$

$Sr + Sh = 2\pi h r^2$

$Sr = h(2\pi r^2 - S)$

$h = \frac{Sr}{2\pi r^2 - S} = \frac{200\,000 \cdot 6\,370}{2\pi \cdot 6\,370^2 - 200\,000} \doteq 5\ \text{km}$



Letec uvidí povrch Zeme s rozlohou $200\ 000\ \text{km}^2$ z výšky 5 km.

Pr. 8

Urči povrch guľového pásu a objem guľovej vrstvy, ak sú dané polomery podstáv $\rho_1 = 11{,}2\ \text{cm}$, $\rho_2 = 3{,}2\ \text{cm}$, polomer gule $r = 13\ \text{cm}$, pričom stred gule neleží vo vnútri vrstvy.

$v = x - y$ — Na výpočet S a V potrebujeme zistiť výšku guľovej vrstvy.

$x = \sqrt{r^2 - \rho_2^2} = \sqrt{13^2 - 3{,}2^2} \doteq 12{,}6\ \text{cm}$

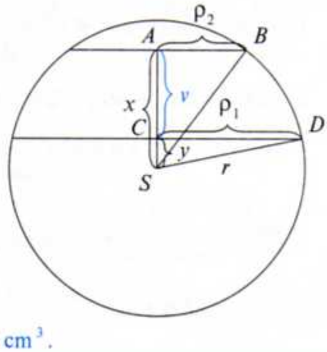
$y = \sqrt{r^2 - \rho_1^2} = \sqrt{13^2 - 11{,}2^2} \doteq 6{,}6\ \text{cm}$

$v = x - y = 12{,}6 - 6{,}6 = 6\ \text{cm}$ — Výšku určíme z pravouhlých trojuholníkov ASB a CSD použitím Pytagorovej vety.

$V = \frac{\pi v}{6}\cdot(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2) =$ — Vypočítame objem guľovej vrstvy.

$= \frac{\pi \cdot 6}{6}\cdot(3\cdot 11{,}2^2 + 3\cdot 3{,}2^2 + 6^2) \doteq 1\ 391,\ 85\ \text{cm}^3$

$S = 2\pi r v = 2\pi \cdot 13 \cdot 6 \doteq 490{,}1\ \text{cm}^2$ — Vypočítame obsah guľového pása.



Pás má obsah $S = 490{,}1\ \text{cm}^2$ a objem guľovej vrstvy je $V = 1\ 391,\ 85\ \text{cm}^3$.

32. Súradnice bodov a vektorov v rovine a priestore

Obsah kapitoly:

Táto kapitola (i kapitoly č. 33, 34) patria do časti matematiky nazývanej analytická geometria. Analytická geometria transformuje geometrické problémy na algebrické, t. j. úlohy rieši algebrickým aparátom (riešenie lineárnych a kvadratických rovníc, nerovníc, ich sústav ..., používa vektory a operácie s nimi) a výsledok potom opäť geometricky interpretuje. Aby sa mohli geometrické problémy transformovať na algebrické, zaviedli sme súradnicový systém, do ktorého umiestňujeme geometrický útvar a opisujeme ho pomocou súradníc bodov. V tejto kapitole spomíname aj základy vektorovej algebry, ďalšej pomôcky na opis a riešenie analytických problémov.

Sústava súradníc, súradnice bodov

SÚSTAVU SÚRADNÍC definujeme takto:

1. Zvolíme ZAČIATOK SÚSTAVY SÚRADNÍC 0.
2. Začiatkom 0 vedieme priamky x, y, z, ktoré nazývame SÚRADNICOVÉ OSI.
3. Osi orientujeme, určíme kladný a záporný smer osí od začiatku 0. Osi sa takto rozdelia na kladnú a zápornú časť (polos). Kladné polosi označujeme obvykle šípkou.
4. Zvolíme JEDNOTKY na osiach.

V tomto texte budeme používať také sústavy, ktoré majú osi navzájom kolmé a jednotky na všetkých osiach rovnako dlhé.

Podľa toho, kde sa pohybujeme a pracujeme, definujeme príslušný počet osí. Kvôli jednoduchosti si označíme:

- priestor na priamke E_1 (jednorozmerný priestor),
- priestor v rovine E_2 (dvojrozmerný priestor),
- priestor, v ktorom žijeme E_3 (trojrozmerný priestor).
- a v priestore E_1 definujeme jednu os x, v E_2 dve osi x, y a v E_3 tri osi x, y, z.

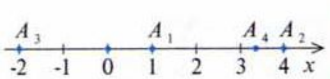
Každému bodu A sa priraďuje:

- v E_1 číslo reprezentujúce jeho súradnicu x_A. Zapisujeme $A[x_A]$.
- v E_2 usporiadaná dvojica alebo dve súradnice x_A, y_A. Zapisujeme $A[x_A, y_A]$.
- v E_3 usporiadaná trojica alebo tri súradnice x_A, y_A, z_A. Zapisujeme $A[x_A, y_A, z_A]$.

Pritom $[x_A] \in \mathrm{R}$, $[x_A, y_A] \in \mathrm{R}^2$, $[x_A, y_A, z_A] \in \mathrm{R}^3$.

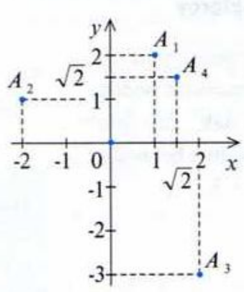
Pr. 1

Znázorni body $A_1\,[1]$, $A_2\,[4]$, $A_3\,[-2]$, $A_4\left[\sqrt{10}\right]$, $0[0]$ v E_1.



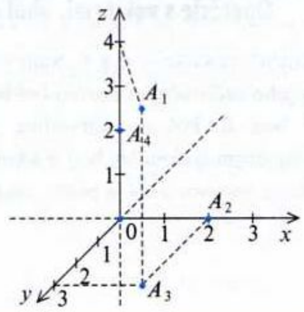
Pr. 2

Znázorni body $A_1\,[1, 2]$, $A_2\,[-2, 1]$, $A_3\,[2, -3]$, $A_4\left[\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, $0[0, 0]$ v E_2.



Pr. 3

Znázorni body $A_1\,[3, -1, 1]$, $A_2\,[2, 0, 0]$, $A_3\,[2, 3, 0]$, $A_4\,[0, 0, 2]$, $0[0, 0, 0]$ v E_3.



Vektory

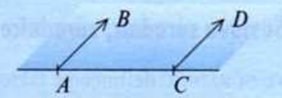
Pri definovaní pojmu vektor vychádzame z pojmu orientovaná úsečka.

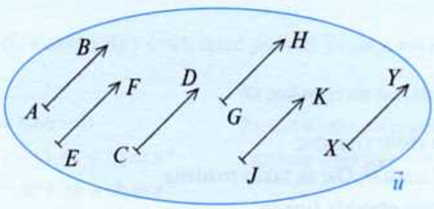
ORIENTOVANÁ ÚSEČKA je úsečka, ktorej krajné body majú určené poradie, čiže jeden krajný bod je označený ako ZAČIATOČNÝ BOD, druhý krajný bod je označený ako KONCOVÝ BOD.

Ak je A začiatočný bod a bod B koncový, hovoríme o orientovanej úsečke $\overrightarrow{AB}$. Kvôli znázorneniu umiestňujeme pri koncovom bode šípku.

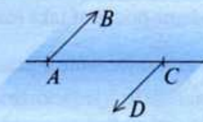
VEKTOROM nazývame množinu všetkých súhlasne orientovaných úsečiek s rovnakou dĺžkou. Vektory označujeme malými písmenami a nad ne umiestňujeme šípku, napr. $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.
Jednotlivé orientované úsečky, ktoré reprezentujú (predstavujú) vektor $\vec{u}$, nazývame UMIESTNENIE VEKTORA $\vec{u}$.

Orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ znázornené na obrázku nazývame SÚHLASNE ORIENTOVANÉ ÚSEČKY, pretože obe ležia v tej istej polrovine určenej priamkou $\leftrightarrow AC$.





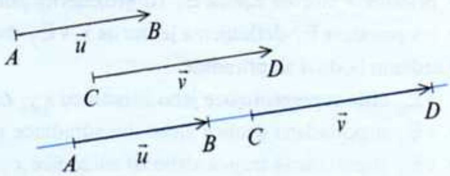
Orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ znázornené na obrázku nazývame NESÚHLASNE ORIENTOVANÉ ÚSEČKY, ak obe ležia v opačných polrovinách určenej priamkou $\leftrightarrow AC$.



VEĽKOSŤ VEKTORA $\vec{u}$ je veľkosť každého jeho umiestnenia a označujeme ju $|\vec{u}| = |\overrightarrow{AB}|$.

NULOVÝ VEKTOR $\vec{o}$ je každý vektor, ktorého veľkosť sa rovná nule. Píšeme $|\vec{o}| = 0$.

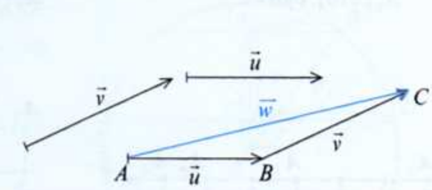
Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sa nazývajú KOLINEÁRNE, práve vtedy, keď ich ľubovoľné umiestnenia sú navzájom rovnobežné.



Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sa nazývajú KOMPLANÁRNE práve vtedy, keď po ich umiestnení v spoločnom počiatku ležia v jednej rovine.

Operácie s vektormi, uhol dvoch vektorov

SČÍTANIE VEKTOROV $\vec{u}$ a $\vec{v}$: Najprv vektor $\vec{u}$ umiestnime tak, aby jeho začiatočným bodom bol bod A a koncovým bodom bol bod B. Potom umiestnime vektor $\vec{v}$ tak, aby jeho začiatočným bodom bol bod B a koncovým bodom bol bod C. Súčtom vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ je potom vektor $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.



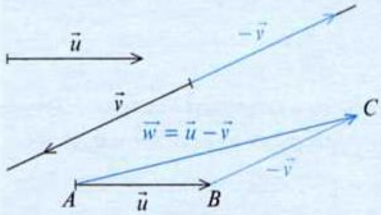
Sčítanie vektorov môžeme rozšíriť na ľubovoľný konečný počet vektorov. Pre sčítanie vektorov platí komutatívny aj asociatívny zákon.

NÁSOBENIE VEKTORA $\vec{u}$ ČÍSLOM k: Ak je k ľubovoľné reálne číslo a $\vec{u}$ ľubovoľný vektor, tak ich súčinom je každý vektor $\vec{v}$, ktorý má veľkosť $|\vec{v}| = |k| \cdot |\vec{u}|$. Pre $k > 0$ je vektor $\vec{v}$ súhlasne orientovaný s $\vec{u}$, pre $k < 0$ je vektor $\vec{v}$ nesúhlasne orientovaný s $\vec{u}$. Zapisujeme: $\vec{v} = k\vec{u}$.

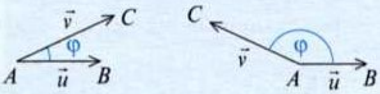
Ak sa $k = 0$, tak $\vec{v} = 0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$.
Ak sa $\vec{u} = \vec{o}$, tak $\vec{v} = k \cdot \vec{o} = \vec{o}$.

Ak sa $k = -1$, dostaneme vektor $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$. Tento vektor nazývame VEKTOR OPAČNÝ K VEKTORU $\vec{v}$. Veľkosť vektora $\vec{v}$ a veľkosť vektora $-\vec{v}$ je to isté číslo. Zapisujeme: $|\vec{v}| = |-\vec{v}|$.

ODČÍTOVANIE VEKTOROV $\vec{u}$ a $\vec{v}$: K vektoru $\vec{u}$ pripočítame vektor opačný k vektoru $\vec{v}$. Zapisujeme: $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.



UHOL DVOCH NENULOVÝCH VEKTOROV, ktoré majú umiestnenia $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ a $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, je konvexný uhol $\varphi = \sphericalangle BAC$, kde $\varphi \in \langle 0°, 180° \rangle$.



Ak je aspoň jeden z dvoch vektorov nulový, ich uhol nedefinujeme.

Súradnice vektorov

Vektor $\overrightarrow{AB}$ môžeme symbolicky zapísať takto: $\overrightarrow{AB} = B - A$.

- VE_1: Ak je $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ľubovoľný nenulový vektor so začiatočným bodom $A[x_A]$, koncovým bodom $B[x_B]$, tak má súradnicu $\vec{u}_1 = (x_B - x_A)$. Zapisujeme: $\vec{u}(u_1)$.
- VE_2: Ak je $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ľubovoľný nenulový vektor so začiatočným bodom $A[x_A, y_A]$, koncovým bodom $B[x_B, y_B]$, tak má súradnice $\vec{u}_1 = x_B - x_A, \vec{u}_2 = y_B - y_A$. Zapisujeme: $\vec{u}(u_1; u_2)$.
- VE_3: Ak je $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ľubovoľný nenulový vektor so začiatočným bodom $A[x_A, y_A, z_A]$, koncovým bodom $B[x_B, y_B, z_B]$, tak má súradnice $\vec{u}_1 = x_B - x_A, \vec{u}_2 = y_B - y_A, \vec{u}_3 = z_B - z_A$. Zapisujeme: $\vec{u}(u_1; u_2; u_3)$.

Pre nenulový vektor platí:
v π_1 $\vec{o} = (0)$
v π_2 $\vec{o} = (0, 0)$
v π_3 $\vec{o} = (0, 0, 0)$

Čísla u_1, u_2, u_3 nazývame SÚRADNICE VEKTOROV alebo aj ZLOŽKY VEKTOROV.

Zhrnutie poznatkov o vektoroch, skalárny súčin vektorov

V tabuľke je zhrnutie poznatkov o vektoroch v jednorozmernom, dvojrozmernom a trojrozmernom priestore:

	E_1	E_2	E_3
Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$	$\vec{u} = (u_1), \vec{v} = (v_1)$	$\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$	$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$
Veľkosť vektora $\vec{u}$	$\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{u_1^2}$	$\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$	$\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$
Rovnosť vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$	$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1$	$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2$	$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2 \wedge u_3 = v_3$
Súčet vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$	$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1)$	$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$	$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$
Opačný vektor k $\vec{u}$	$-\vec{u} = (-u_1)$	$-\vec{u} = (-u_1, -u_2)$	$-\vec{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)$
Rozdiel vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$	$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1)$	$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$	$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$
k-násobok vektora $\vec{u}$	$k \cdot \vec{u} = (ku_1)$	$k \cdot \vec{u} = (ku_1, ku_2)$	$k \cdot \vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$
Skalárny súčin vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

SKALÁRNY SÚČIN vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sa definuje aj takto:
$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi$

Skalárny súčin vektorov je reálne číslo.

Pre uhol φ nenulových vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ platí:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

KRITÉRIUM KOLMOSTI VEKTOROV: Dva vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú kolmé práve vtedy, keď $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \wedge \vec{u} \neq 0 \wedge \vec{v} \neq 0$.

Skalárny súčin vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sa rovná nule, t. j. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$:

- ak $\vec{u} = \vec{o}$,
- ak $\vec{v} = \vec{o}$,
- ak $\vec{u} = \vec{o} \wedge \vec{v} = \vec{o}$,
- ak $\cos\varphi = 0$, teda ak $\varphi = 90°$.

Pr. 4

Dané sú vektory $\vec{u} = (2; -3)$, $\vec{v} = (3; 5)$. **a)** Urči veľkosť týchto vektorov. **b)** Zisti, či sa tieto vektory rovnajú. **c)** Vypočítaj ich súčet. **d)** Vypočítaj ich rozdiel. **e)** Urči vektory opačné k týmto vektorom. **f)** Urči súradnice vektorov $3\vec{u}$, $\sqrt{2}\vec{v}$. **g)** Vypočítaj skalárny súčin týchto vektorov. **h)** Vypočítaj uhol týchto vektorov.

a) $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$, $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

b) $(2 \neq 3 \wedge -3 \neq 5) \Rightarrow \vec{u} \neq \vec{v}$

c) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} = (5; 2)$

d) $\vec{u} - \vec{v} = \vec{z} = (-1; -8)$

e) $-\vec{u} = (-2; 3)$, $-\vec{v} = (-3; -5)$

f) $3\vec{u} = (6; -9)$, $\sqrt{2} \cdot \vec{v} = (3\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$

g) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 5 = -9$

h) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{-9}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{34}} \Rightarrow \varphi = 115° \, 32'$

Pr. 5

Dané sú vektory $\vec{u}(1; 2; -4)$ a $\vec{v}(0; 0; 1)$: **a)** Urči veľkosť týchto vektorov. **b)** Zisti, či sa tieto vektory rovnajú. **c)** Vypočítaj ich súčet. **d)** Vypočítaj ich rozdiel. **e)** Urč vektory opačné k týmto vektorom. **f)** Urči súradnice vektora $3\vec{u}$. **g)** Vypočítaj skalárny súčin týchto vektorov. **h)** Vypočítaj uhol týchto vektorov.

a) $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$, $|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$

b) $(1 \neq 0 \wedge 2 \neq 0 \wedge -4 \neq 1) \Rightarrow \vec{u} \neq \vec{v}$

c) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} = (1; 2; -3)$

d) $\vec{u} - \vec{v} = \vec{z} = (1; 2; -5)$

e) $-\vec{u} = (-1; -2; 4)$, $-\vec{v} = (0; 0; -1)$

f) $3\vec{u} = (3; 6; -12)$

g) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 = -4$

h) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{-4}{\sqrt{21} \cdot 1} = -\dfrac{4}{\sqrt{21}} \Rightarrow \varphi = 150° \, 48'$

33. Priamka a rovina

Obsah kapitoly:

Súradnice bodov, vektorov, stred úsečky a dĺžka úsečky v rovine

Určovanie súradníc bodov a vektorov sme si už ukázali v kap. č. 32.

SÚRADNICE BODOV zapisujeme takto:
$A[x_A, y_A]$, $B[x_B, y_B]$ alebo $C[c_1, c_2]$ a pod.
Bod X zapisujeme $X[x_X, y_X]$ alebo tiež $X[x, y]$.

SÚRADNICE VEKTOROV zapisujeme takto:
$\vec{u}(u_1, u_2)$, $\vec{v}(a, b)$ atď.

Ak $A[x_A, y_A]$, $B[x_B, y_B]$, tak STRED $S[x_S, y_S]$ ÚSEČKY AB možno určiť takto: $S\left[\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right]$

Symbolická rovnica pre stred úsečky je $S = \dfrac{A+B}{2}$.

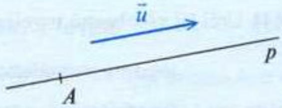
Ak $A[x_A, y_A]$, $B[x_B, y_B]$, tak DĹŽKU ÚSEČKY AB, ktorú označujeme $|AB|$, určíme takto:

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Dĺžka úsečky je rovnaká, či ju meriame od bodu A k bodu B alebo od bodu B k bodu A. Preto sú v predchádzajúcom vzťahu uvedené dve možnosti určenia dĺžky.

Parametrická rovnica priamky, polpriamky a úsečky v rovine

- Nech je priamka p určená bodom $A[x_A, y_A]$ a smerovým vektorom $\vec{u}(u_1, u_2)$.



Umiestnenie vektora $\vec{u}$ zvolíme takto:

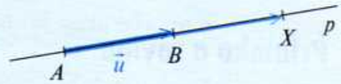
Teraz chceme opísať každý bod $X[x, y]$ priamky. Na priamke vidíme kolineárne vektory $\overrightarrow{AX} = X - A$ a $\vec{u}$. O týchto vektoroch platí $\overrightarrow{AX} = t\vec{u}$ (pričom $t \in \mathbb{R}$), číslo t nazývame PARAMETER. Symbolicky sa dá prepísať táto rovnica na rovnicu $X - A = t\vec{u}$ a po úprave na $X = A + t\vec{u}$.

Rovnicu p: $X = A + t\vec{u}$, pričom $t \in \mathbb{R}$, nazývame PARAMETRICKÉ VYJADRENIE PRIAMKY p.

Túto symbolickú rovnicu môžeme rozpísať pomocou súradníc p: $\begin{cases} x = x_A + tu_1 \\ y = y_A + tu_2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Bod X je ľubovoľný bod priamky p,
bod A je určujúci bod priamky p,
$\vec{u}$ je smerový vektor priamky p,
t je parameter, ktorý nadobúda hodnotu každého reálneho čísla.

- Ak je priamka p určená dvoma rôznymi bodmi $A[x_A, y_A]$, $B[x_B, y_B]$, tak postupujeme obdobne. Určíme smerový vektor $\vec{u} = B - A$ a napíšeme symbolickú rovnicu priamky p v tvare $X = A + t(B - A)$, $t \in \mathbb{R}$.



Rozpíšeme ju pomocou súradníc a dostaneme

$$p: \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Predchádzajúcimi rovnicami môžeme opísať aj polpriamku $\mapsto AB$, aj úsečku AB. Rovnica $X = A + t(B - A)$, $t \in \langle 0, \infty)$, je **PARAMETRICKÝM VYJADRENÍM POLPRIAMKY** $\mapsto AB$.
Rovnicu $X = A + t(B - A)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, nazývame **PARAMETRICKÉ VYJADRENIE ÚSEČKY** AB.

Priamku, polpriamku i úsečku charakterizujeme rovnakými rovnicami, líšia sa len množinami, z ktorých vyberáme parameter.

Všeobecná rovnica priamky v rovine

Všeobecnú rovnicu priamky p v rovine získame vylúčením parametra z parametrického vyjadrenia.

VŠEOBECNÁ ROVNICA PRIAMKY p má potom tvar $p: ax + by + c = 0$, pričom x, y sú súradnice ľubovoľného bodu priamky p, koeficienty a, b, c sú také reálne čísla, že $[a, b] \neq [0, 0]$.

Pr. 1

Priamka p je určená parametrickým vyjadrením $p: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Urči jej všeobecnú rovnicu.

$$\begin{aligned} x &= 2 + 3t \quad / \cdot 2 \\ y &= 3 - 2t \quad / \cdot 3 \\ \hline 2x + 3y &= 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\ 2x + 3y - 13 &= 0 \\ p: 2x + 3y - 13 &= 0 \end{aligned}$$

Rovnice vhodne vynásobíme tak, aby sa po ich sčítaní vylúčil parameter.

Pr. 2

Priamka p je určená bodmi $A[2; 3]$, $B[5; 1]$. Urči jej všeobecnú rovnicu.

$p: ax + by + c = 0$

Napíšeme predpokladaný tvar rovnice priamky.

$A \in p \Leftrightarrow 2a + 3b + c = 0$

$B \in p \Leftrightarrow 5a + b + c = 0$

Dosadíme súradnice bodov do rovnice priamky.

$$\begin{aligned} 2a + 3b &= -c \\ 5a + b &= -c \quad / \cdot (-3) \quad ① \\ \hline -13a &= 2c \\ a &= -\frac{2c}{13} \end{aligned}$$

Dostali sme sústavu dvoch rovníc s tromi neznámymi a, b, c. Vyriešime ju tak, že c pokladáme za parameter.

Dosadíme za a do rovnice ①.

$$-\frac{10c}{13} + b + c = 0$$

$$b = -\frac{3c}{13}$$

Dosadíme za a i b do rovnice priamky p.

$$-\frac{2c}{13}x - \frac{3c}{13}y + c = 0 \quad / \cdot (-13)$$

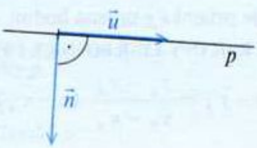
$$2cx + 3cy - 13c = 0 \quad / : c$$

$$p: 2x + 3y - 13 = 0$$

Príklad by sme mohli riešiť aj tak, že najprv určíme parametrické vyjadrenie a z neho určíme všeobecnú rovnicu priamky.

Ak porovnáme výsledok tohto príkladu s výsledkom predchádzajúceho, zistíme, že ide o tú istú priamku danú rôznymi spôsobmi.

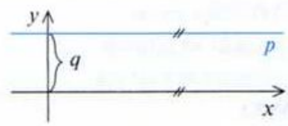
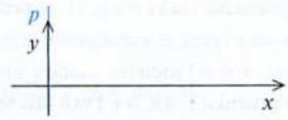
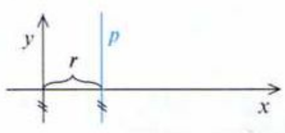
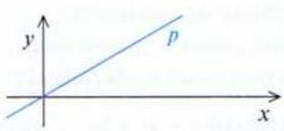
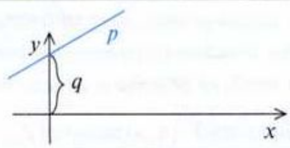
Vo všeobecnej rovnici priamky sú koeficienty a, b súradnicami tzv. NORMÁLOVÉHO VEKTORA $\vec{n}$ priamky p. Normálový vektor $\vec{n}(a, b)$ je vektor kolmý na smerový vektor $\vec{u}$ priamky p.



Vzťah medzi normálovým vektorom $\vec{n}$ a smerovým vektorom $\vec{u}$ priamky p:
Ak $\vec{n}(a, b)$, tak $\vec{u}(-b, a)$ alebo $\vec{u}(b, -a)$.

Musí platiť $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ (pretože vektory sú kolmé), čo je splnené $(a \cdot (-b) + ab = 0)$.

Všetky možnosti, ktoré môžu nastať vo všeobecnej rovnici priamky p: $ax + by + c = 0$ pre premenné hodnoty koeficientov a, b, c, sú v tejto tabuľke:

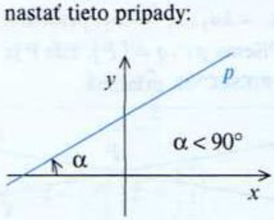
$a = 0$, $b \neq 0$, $c = 0$ p: $by = 0$ resp. $y = 0$ Rovnica je rovnicou osi x.	$a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ p: $by + c = 0$ resp. $y = q$ Rovnica je rovnicou priamky rovnobežnej s osou x.	$a \neq 0$, $b = 0$, $c = 0$ p: $ax = 0$ resp. $x = 0$ Rovnica je rovnicou osi y.
		
$a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$ p: $ax + c = 0$ resp. $x = r$ Rovnica je rovnicou priamky rovnobežnej s osou y.	$a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$ p: $ax + by = 0$ resp. $y = kx$ Rovnica je rovnicou priamky, ktorá prechádza začiatkom sústavy súradníc.	$a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ p: $ax + by + c = 0$ resp. $y = kx + q$ Rovnica je rovnicou priamky, ktorej poloha v sústave súradníc je úplne ľubovoľná.
		

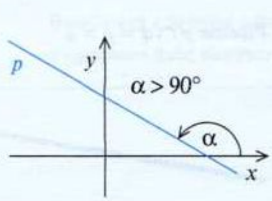
Smernicový tvar rovnice priamky v rovine

SMERNICOVÝ TVAR ROVNICE PRIAMKY p je p: $y = kx + q$, pričom $k, q \in \mathbb{R}$.
Koeficient k sa nazýva SMERNICA PRIAMKY. Smernicový tvar získame zo všeobecnej rovnice priamky $p: ax + by + c = 0$, ak $b \neq 0$, celú rovnicu môžeme deliť b a po úprave dostaneme $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, kde $k = -\frac{a}{b}$, $q = -\frac{c}{b}$.

Priamku nemôžeme určiť smernicovým tvarom, ak je rovnobežná s osou y $(b = 0)$.

Smernicový tvar rovnice priamky súvisí s pojmom smerový uhol α, lebo smernica k je definovaná tiež ako $k = \text{tg}\,\alpha$. Uhol $\alpha \in \langle 0°, 180° \rangle$; $\alpha \neq 90°$.
SMEROVÝ UHOL α je definovaný ako kladný orientovaný uhol, ktorého začiatočným ramenom je kladný smer osi x a koncovým ramenom je časť priamky p.
Môžu nastať tieto prípady:

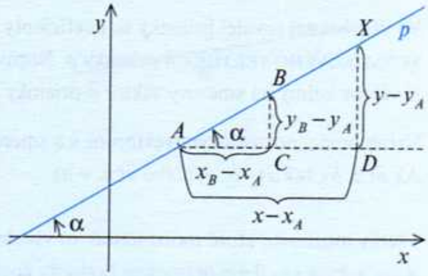




Orientácia uhla je označená šípkou.

Ak je priamka p určená bodmi $A[x_A, y_A]$, $B[x_B, y_B]$, tak **SMERNICOVÝ TVAR ROVNICE PRIAMKY** p môžeme vyjadriť v tvare

$$p\colon y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\cdot(x - x_A);\ \text{pričom } x_B \neq x_A.$$



Tento tvar vyplýva z nasledujúcej úvahy (pozri obrázok).

Pretože $\Delta\ ACB \sim \Delta\ ADX$, platí $\dfrac{y - y_A}{x - x_A} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Úpravou dostaneme vyššie uvedenú rovnicu

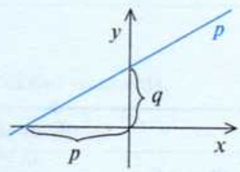
$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\cdot(x - x_A),\ \text{v ktorej } k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Každý tvar rovnice priamky p sa dá matematickými operáciami upraviť na ktorýkoľvek z možných tvarov.

Úsekový tvar rovnice priamky v rovine

Ak poznáme úseky p a q, ktoré priamka p vymedzuje na osi x a na osi y (úsek je vzdialenosť priesečníka priamky so súradnicovou osou od začiatku sústavy súradníc), môžeme napísať pre túto priamku **ÚSEKOVÝ TVAR ROVNICE PRIAMKY**

$p\colon \dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$, pričom $p \neq 0 \wedge q \neq 0$.



Vzájomná poloha bodu a priamky, vzdialenosť bodu od priamky v rovine

Ak je daná rovnica priamky p a bod $A[x_A, y_A]$, tak:

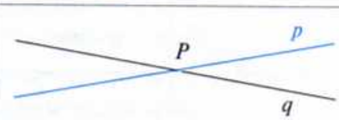
- A leží na priamke p, ak jeho súradnice vyhovujú rovnici priamky (po dosadení do rovnice dostávame pravdivý výrok o rovnosti čísel),
- A neleží na priamke p, ak jeho súradnice nevyhovujú rovnici priamky.

VZDIALENOSŤ $v(A, p)$ **BODU** $A[x_A, y_A]$ **OD PRIAMKY** $p\colon ax + by + c = 0$ je $v(A, p) = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Vzájomná poloha priamok, polpriamok a úsečiek v rovine

Vzájomnú polohu priamok, polpriamok a úsečiek v rovine určujeme tak, že hľadáme ich spoločné body a zisťujeme, v akom vzťahu sú ich smerové, prípadne normálové vektory. Analytickú problematiku takto transformujeme na riešenie algebrických lineárnych rovníc a ich sústav.

Priamky p a q sú:

ROVNOBEŽNÉ RÔZNE práve vtedy, keď $p\colon ax + by + c = 0$, $q\colon kax + kby + c' = 0 \wedge kc \neq c'$; $k \in \mathrm{R}$. Píšeme $p \cap q = \emptyset$.	**ROVNOBEŽNÉ ZHODNÉ (TOTOŽNÉ)** práve vtedy, keď $p\colon ax + by + c = 0$, $q\colon kax + kby + kc = 0$; $k \in \mathrm{R}$. Píšeme $p \cap q = p = q$.	**RÔZNOBEŽNÉ RÔZNE** práve vtedy, keď $p\colon a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $q\colon a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$, čiže keď súčasne neplatí niektorá rovnosť $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$, pričom $k \in \mathrm{R}$. Píšeme $p \cap q = \{P\}$, kde P je **PRIESEČNÍK** priamok.
		

Pr. 3

a) Urči všeobecnú rovnicu priamky $p = \leftrightarrow AB$, ak $A[2; -3]$, $B[1; 0]$.

b) Urči smernicový tvar priamky p.

c) Urči normálový vektor priamky p.

d) Urči smerový vektor priamky p.

e) Urči smernicu priamky p.

f) Urči smerový uhol priamky p.

g) Zisti, či bod $C[0; 3]$ leží na priamke p.

h) Zisti, či bod $D[1; 3]$ leží na priamke p.

i) Urči vzdialenosť priamky p od bodu D.

a) $p: X = A + t(B - A),\ t \in \mathbb{R}$

$$x = 2 - t \quad / \cdot 3$$
$$y = -3 + 3t$$

$p: 3x + y - 3 = 0$

b) $p: 3x + y - 3 = 0 \Rightarrow p: y = -3x + 3$

c) napr. $\vec{n}(3; 1)$

d) napr. $\vec{u}(-1; 3)$

e) $k = -3$

f) $\operatorname{tg} \alpha = -3 \Rightarrow \alpha = 108° 26'$

g) $p: 3x + y - 3 = 0$

$3 \cdot 0 + 3 - 3 = 0$

$0 = 0 \Rightarrow C \in p$

Dosadíme súradnice bodu C do rovnice priamky.

h) $p: 3x + y - 3 = 0$

$3 \cdot 1 + 3 - 3 = 0$

$3 \neq 0 \Rightarrow D \notin p$

Dosadíme súradnice bodu D do rovnice priamky.

i) $v(D, p) = \dfrac{|3 \cdot 1 + 3 - 3|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

Pr. 4

Urči rovnicu priamky, ktorá je kolmá na priamku $p: 3x + y - 3 = 0$ a prechádza bodom $E[2; 3]$.

$p: 3x + y - 3 = 0$

Normálový vektor priamky p je $\vec{n}(3; 1)$. Ak majú byť priamky kolmé, musia byť kolmé aj ich normálové vektory, teda $\vec{n} \cdot \vec{m} = 0$.

$q: -x + 3y + c = 0$

Normálový vektor priamky q je $\vec{m}(-1; 3)$.

$E \in q \Leftrightarrow -2 + 9 + c = 0$

$c = -7$

Dosadíme do rovnice priamky q súradnice bodu E.

$q: -x + 3y - 7 = 0$

Zápis môžeme upraviť aj na tvar $q: x - 3y + 7 = 0$.

Pr. 5

Dané sú priamky p, q. Urči ich vzájomnú polohu.

a) $p: 2x + 3y + 6 = 0$, $q: 4x + 6y + 14 = 0$

b) $p: 2x + 3y + 6 = 0$, $q: 4x + 6y + 12 = 0$

c) $p: 2x + 3y + 6 = 0$, $q: 4x - 3y + 6 = 0$

a) Pretože $4 = 2 \cdot 2 \wedge 6 = 2 \cdot 3 \wedge 14 \neq 2 \cdot 6$ (všeobecne $a_2 = 2 \cdot a_1 \wedge b_2 = 2 \cdot b_1 \wedge c_2 \neq 2 \cdot c_1$), priamky p, q sú rovnobežné ($p \parallel q$).

b) Pretože $4 = 2 \cdot 2 \wedge 6 = 2 \cdot 3 \wedge 12 = 2 \cdot 6$ (všeobecne $a_2 = 2 \cdot a_1 \wedge b_2 = 2 \cdot b_1 \wedge c_2 = 2 \cdot c_1$), priamky p, q sú totožné ($p = q$).

c) Pretože $4 = 2 \cdot 2$, ale $-3 \neq 2 \cdot 3$ (všeobecne $a_2 = 2 \cdot a_1$, $b_2 \neq 2 \cdot b_1$), priamky p, q sú rôznobežné.

$$2x + 3y + 6 = 0$$
$$4x - 3y + 6 = 0$$
$$6x + 12 = 0$$
$$x = -2$$

Určíme priesečník priamok.

$$-4 + 3y + 6 = 0$$
$$3y = -2$$
$$y = -\frac{2}{3}$$

Dosadíme za x do druhej z rovníc a vypočítame druhú súradnicu priesečníka.

$$p \cap q = \left\{ P\left[-2, -\frac{2}{3}\right] \right\}$$

Pr. 6

Urči spoločný bod priamky AB, pričom $A[3; 5]$, $B[-1; 4]$, a úsečky CD, pričom $C[2; 4]$, $D[6; -2]$.

$\leftrightarrow AB: X = A + t(B - A),\ t \in \mathrm{R}$ $\qquad \leftrightarrow AB: \begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 5 - t \end{cases},\ t \in \mathrm{R}$

Určíme parametrické rovnice priamky a úsečky.

$CD: X = C + r(D - C),\ r \in \langle 0, 1\rangle$ $\qquad CD: \begin{cases} x = 2 + 4r \\ y = 4 - 6r \end{cases},\ r \in \langle 0, 1\rangle$

$$\begin{aligned} 3 - 4t &= 2 + 4r \\ 5 - t &= 4 - 6r \\ \hline -4t - 4r &= -1 \\ -t + 6r &= -1 \quad / \cdot(-4) \\ \hline -28r &= 3 \\ r &= -\frac{3}{28} \end{aligned}$$

Riešime sústavu 4 rovníc so 4 neznámymi, ktorú porovnaním x a y transformujeme na sústavu 2 rovníc s 2 neznámymi.

$r \notin \langle 0, 1\rangle \Rightarrow \leftrightarrow AB \cap CD = \emptyset$

Priamka AB a úsečka CD nemajú žiadny spoločný bod.

Pr. 7

Zisti, či polpriamka $p: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$, kde $t \in \langle 0, \infty)$, pretína priamku $q: x + 3y - 8 = 0$.

$$\begin{aligned} 2 + 5t + 3(-1 + 3t) - 8 &= 0 \\ 2 + 5t - 3 + 9t - 8 &= 0 \\ 14t &= 9 \\ t &= \frac{9}{14} \end{aligned}$$

Chceme zistiť spoločné body polpriamky a priamky, preto x a y z parametrického vyjadrenia polpriamky p dosadíme do rovnice priamky q.

$t \in \langle 0, \infty) \Rightarrow p \cap q \neq \emptyset$

Prienikom priamky a polpriamky nie je prázdna množina.

$x = 2 + \frac{45}{14} = \frac{73}{14}$

$y = -1 + \frac{27}{14} = \frac{13}{14}$

Určíme súradnice ich priesečníka, a to tak, že dosadíme vypočítanú hodnotu parametra t do parametrického vyjadrenia polpriamky.

Priamka q a polpriamka p sa pretínajú v bode $P\left[\frac{73}{14}; \frac{13}{14}\right]$.

Odchýlka dvoch priamok v rovine

Dané sú priamky $p: a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $q: a_2x + b_2y + c_2 = 0$. ODCHÝLKU α PRIAMOK p a q určíme pomocou ich normálových vektorov. Pretože odchýlku α definujeme ako uhol $\alpha \in \langle 0°, 90°\rangle$, čiže $\cos\alpha \geq 0$, musí byť v čitateli vzťahu absolútna hodnota: $\cos\alpha = \dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$.

Pr. 8

Urči odchýlku priamok $p: 5x - y + 7 = 0$ a $q: 2x - 3y + 1 = 0$.

$$\cos\alpha = \frac{|5 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3)|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|10 + 3|}{\sqrt{26}\sqrt{13}} = \frac{13}{13\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$$

Pri určovaní vnútorných uhlov trojuholníka (a tiež iného rovinného útvaru) nemôžeme automaticky využívať odchýlku priamok, na ktorých ležia strany trojuholníka. Výhodnejšie je použiť odchýlku vektorov. (Odchýlka priamok $\alpha \in \langle 0°, 90°\rangle$, no jeden z vnútorných uhlov trojuholníka, resp. odchýlka vektorov, môže patriť do intervalu $\langle 0°, 180°\rangle$).

Pr. 9

Daný je trojuholník ABC: $A[5;6]$, $B[-2;4]$, $C[6;-1]$.

a) Urči parametrické a všeobecné rovnice priamok, na ktorých ležia strany a, b, c trojuholníka ABC.

b) Urči rovnice priamok, na ktorých ležia výšky v_a, v_b, v_c $\Delta\ ABC$.

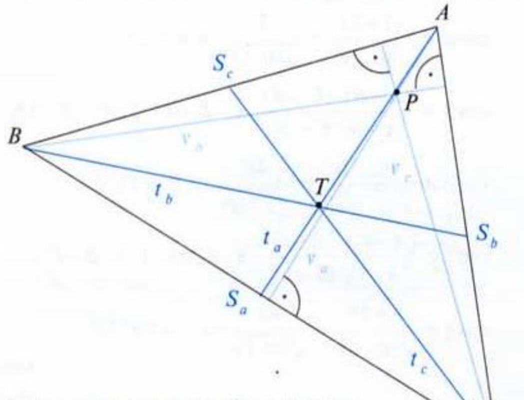
c) Urči priesečník P výšok $\Delta\ ABC$.

d) Urči rovnice priamok, na ktorých ležia ťažnice t_a, t_b $\Delta\ ABC$.

e) Urči súradnice ťažiska T ako $t_a \cap t_b$.

f) Urči veľkosti výšok.

g) Urči veľkosti vnútorných uhlov $\Delta\ ABC$.



a) a: $X = B + t_1(C - B),\ t_1 \in \mathrm{R}$

$$x = -2 + 8t_1 \quad /\cdot 5$$
$$y = 4 - 5t_1 \quad /\cdot 8$$

a: $5x + 8y - 22 = 0$

b: $X = A + t_2(C - A),\ t_2 \in \mathrm{R}$

$$x = 5 + t_2$$
$$y = 6 - 7t_2$$

b: $7x + y - 41 = 0$

c: $X = A + t_3(B - A),\ t_3 \in \mathrm{R}$

$$x = 5 - 7t_3$$
$$y = 6 - 2t_3$$

c: $2x - 7y + 32 = 0$

Smerový vektor strany je normálovým vektorom výšky na túto stranu.

b) $v_a: 8x - 5y + c_1 = 0$

$A \in v_a \Leftrightarrow 40 - 30 + c_1 = 0$

$c_1 = -10$

$v_a: 8x - 5y - 10 = 0$

$v_b: x - 7y + c_2 = 0$

$B \in v_b \Leftrightarrow -2 - 28 + c_2 = 0$

$c_2 = 30$

$v_b: x - 7y + 30 = 0$

$v_c: 7x + 2y + c_3 = 0$

$C \in v_c \Leftrightarrow 42 - 2 + c_3 = 0$

$c_3 = -40$

$v_c: 7x + 2y - 40 = 0$

c)
$$8x - 5y - 10 = 0$$
$$x - 7y + 30 = 0$$

$x = \dfrac{220}{51},\ y = \dfrac{250}{51}$

$$v_a \cap v_b = v_a \cap v_b \cap v_c = \left\{P\left[\frac{220}{51}; \frac{250}{51}\right]\right\}$$

Stačí určiť $v_a \cap v_b$, pretože všetky výšky sa pretínajú v jednom bode.

d) $S_a\left[2; \dfrac{3}{2}\right]$, $S_b\left[\dfrac{11}{2}; \dfrac{5}{2}\right]$

Zo vzťahov $S_a = \dfrac{B+C}{2}$, $S_b = \dfrac{A+C}{2}$ určíme súradnice stredov strán a, b.

$t_a: X = S_a + t_1(A - S_a),\ t_1 \in \mathrm{R}$

$$x = 2 + 3t_1$$
$$y = \frac{3}{2} + \frac{9}{2}t_1$$

$t_a: 3x - 2y - 3 = 0$

$t_b: X = S_b + t_2(B - S_b),\ t_2 \in \mathrm{R}$

$$x = \frac{11}{2} - \frac{15}{2}t_2$$
$$y = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}t_2$$

$t_b: x + 5y - 18 = 0$

e)
$$2 + 3t_1 = \frac{11}{2} - \frac{15}{2}t_2$$
$$\frac{3}{2} + \frac{9}{2}t_1 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}t_2$$

$t_1 = \dfrac{1}{3}$

$x = 3,\ y = 3 \Rightarrow T[3;3]$

Porovnáme parametrické vyjadrenie ťažníc t_a, t_b. Dostaneme tak sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi. Vypočítame aspoň jednu neznámu a dosadíme naspäť do rovníc pre x a y.

f) $v_a = v(A, a) = \dfrac{|5\cdot 5+8\cdot 6-22|}{\sqrt{25+64}} = \dfrac{51}{\sqrt{89}}$ j

$v_b = v(B, b) = \dfrac{|7\cdot(-2)+4-41|}{\sqrt{49+1}} = \dfrac{51}{\sqrt{50}}$ j

$v_c = v(C, c) = \dfrac{|2\cdot 6-7\cdot(-1)+32|}{\sqrt{4+49}} = \dfrac{51}{\sqrt{53}}$ j

Pri určovaní vzdialenosti bodu $A[x_A, y_A]$ a priamky $p: ax+by+c=0$ využívame vzťah $v(A, p) = \dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

j je skratka jednotky.

g) $\cos\alpha = \dfrac{(C-A)\cdot(B-A)}{|C-A|\cdot|B-A|}$, $C-A=(1,-7)$, $B-A=(-7,-2)$.

$\cos\alpha = \dfrac{-7+14}{\sqrt{50}\sqrt{53}} = \dfrac{7}{\sqrt{50\cdot 53}} \Rightarrow \alpha = 82°\,11'$

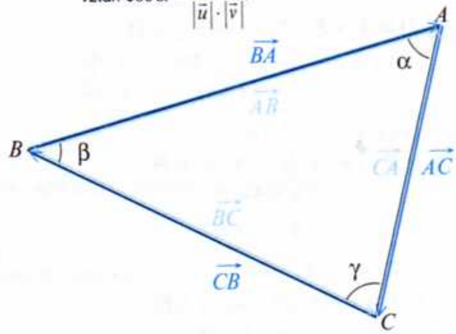
$\cos\beta = \dfrac{(A-B)\cdot(C-B)}{|A-B|\cdot|C-B|}$, $A-B=(7,2)$, $C-B=(8,-5)$

$\cos\beta = \dfrac{56-10}{\sqrt{53}\cdot\sqrt{89}} = \dfrac{46}{\sqrt{53\cdot 89}} \Rightarrow \beta = 47°\,57'$

$\cos\gamma = \dfrac{(A-C)\cdot(B-C)}{|A-C|\cdot|B-C|}$, $A-C=(-1,7)$, $B-C=(-8,5)$

$\cos\gamma = \dfrac{8+35}{\sqrt{50}\sqrt{89}} = \dfrac{43}{\sqrt{50\cdot 89}} \Rightarrow \gamma = 49°\,52'$

Pri určovaní veľkostí vnútorných uhlov využívame vzťah $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$.



Kontrolou správnosti je $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ a to platí:

$82°\,11' + 47°\,57' + 49°\,52' = 180°$.

Súradnice ťažiska $T[x_T, y_T]$ trojuholníka ABC, ktorého vrcholy sú dané, môžeme vyjadriť aj nasledujúcim spôsobom.

Ak $A[x_A, y_A]$, $B[x_B, y_B]$, $C[x_C, y_C]$, tak $T\left[\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}, \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\right]$.

Dôkaz: $3\overrightarrow{S_aT} = \overrightarrow{S_aA}$

$3(T-S_a) = A-S_a$

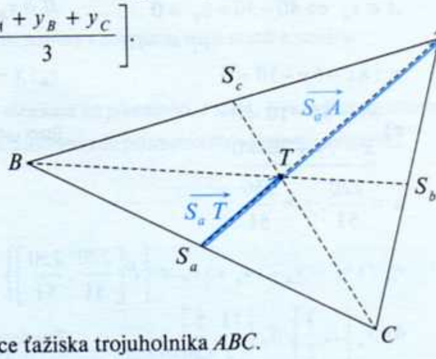
$3T-3S_a = A-S_a$

$3T = A+2S_a$ Dosadíme za $S_a = \dfrac{B+C}{2}$.

$3T = A+2\dfrac{B+C}{2}$

$3T = A+B+C$

$T = \dfrac{A+B+C}{3}$ Symbolická rovnica pre súradnice ťažiska trojuholníka ABC.



Súradnice bodov, vektorov, stred úsečky a dĺžka úsečky v priestore

SÚRADNICE BODOV zapisujeme takto: $A[x_A, y_A, z_A]$, $B[x_B, y_B, z_B]$ alebo $C[c_1, c_2, c_3]$ a pod. Bod X zapisujeme $X[x_x, y_x, z_x]$ alebo tiež $X[x, y, z]$.

SÚRADNICE VEKTOROV zapisujeme takto: $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v}(a, b, c)$ atď.

Ak $A[x_A, y_A, z_A]$, $B[x_B, y_B, z_B]$, tak STRED $S[x_S, y_S, z_S]$ ÚSEČKY AB možno určiť takto:

$S\left[\dfrac{x_A+x_B}{2}, \dfrac{y_A+y_B}{2}, \dfrac{z_A+z_B}{2}\right]$ Symbolická rovnica je v priestore taká istá ako v rovine.

Ak $A[x_A, y_A, z_A]$, $B[x_B, y_B, z_B]$, tak DĹŽKU ÚSEČKY AB, ktorú označujeme $|AB|$, určíme takto:

$|AB| = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2} = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

Parametrická rovnica priamky, polpriamky a úsečky v priestore

- Nech je priamka p určená bodom $A[x_A, y_A, z_A]$ a smerovým vektorom $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$. Rovnicu p: $X = A + t\vec{u}$, pričom $t \in \mathsf{R}$, nazývame **PARAMETRICKÉ VYJADRENIE PRIAMKY** p v priestore.

  Túto symbolickú rovnicu môžeme rozpísať pomocou súradníc

$$p: \begin{cases} x = x_A + tu_1 \\ y = y_A + tu_2, \quad t \in \mathsf{R}. \\ z = z_A + tu_3 \end{cases}$$

- Ak je priamka p určená dvoma rôznymi bodmi $A[x_A, y_A, z_A]$, $B[x_B, y_B, z_B]$, tak parametrické vyjadrenie priamky v symbolickom tvare je p: $X = A + t(B - A)$, $t \in \mathsf{R}$.

  Ak ho rozpíšeme pomocou súradníc, dostaneme

$$p: \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A), \quad t \in \mathsf{R}. \\ z = z_A + t(z_B - z_A) \end{cases}$$

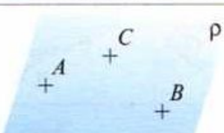
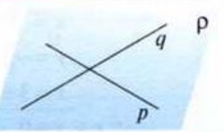
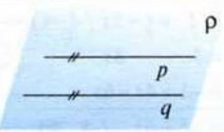
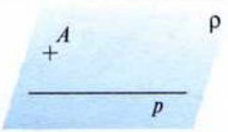
Parametrické vyjadrenie priamky v symbolickom tvare je rovnaké v rovine aj v priestore.

POZOR!!! Všeobecný, smernicový ani úsekový tvar rovnice priamky v priestore NEEXISTUJE!!!

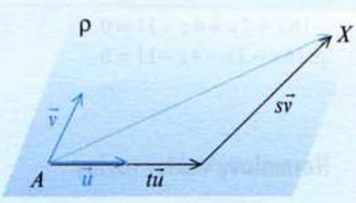
Pre polpriamku a úsečku existujú v E_3 rovnaké rovnice ako pre priamku: $X = A + t\vec{u}$, $X = A + t(B - A)$, líšia sa len oborom hodnôt parametra t. Pre polpriamku $t \in \langle 0, \infty)$, pre úsečku $t \in \langle 0, 1\rangle$.

Parametrická rovnica roviny

Rovina môže byť v priestore určená:

<table>
<tr><td>tromi rôznymi bodmi, ktoré neležia na jednej priamke</td><td>dvoma rôznobežnými priamkami</td><td>dvoma rôznymi rovnobežnými priamkami</td><td>priamkou a bodom, ktorý na nej neleží</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Všetky tieto prípady sa dajú transformovať na určenie roviny ρ bodom $A[x_A, y_A, z_A]$ a dvoma nenulovými vektormi $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, pričom $\vec{u} \neq k \cdot \vec{v} \wedge k \in \mathsf{R}$.



Chceme opísať každý bod X roviny ρ. Určíme vektor $X - A$, ktorý môžeme získať aj tak, že vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ vynásobíme vhodnými reálnymi číslami a tieto násobky vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sčítame. Dostaneme $X - A = t\vec{u} + s\vec{v}$.

Pre každý bod $X[x, y, z]$ roviny ρ teda platí $X = A + t\vec{u} + s\vec{v}$, pričom $t, s \in \mathsf{R}$ (sú to tzv. parametre). Táto rovnica sa nazýva symbolická **PARAMETRICKÁ ROVNICA ROVINY** ρ.

Ak ju rozpíšeme pomocou súradníc, dostávame: $\rho: \begin{cases} x = x_A + tu_1 + sv_1 \\ y = y_A + tu_2 + sv_2, \quad t, s \in \mathsf{R}. \\ z = z_A + tu_3 + sv_3 \end{cases}$

Ak je rovina ρ určená tromi rôznymi bodmi neležiacimi na priamke $A[x_A, y_A, z_A]$, $B[x_B, y_B, z_B]$, $C[x_C, y_C, z_C]$, tak jej symbolická parametrická rovnica má tvar: $X = A + t(B - A) + s(C - A)$, $t, s \in \mathsf{R}$.

Pr. 10

Napíš parametrické vyjadrenie priamky $p = \leftrightarrow AB$: $A[-1; 2; -5]$, $B[3; -2; -4]$.

p: $X = A + t(B - A)$, kde $t \in \mathrm{R}$

$$p: \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 2 - 4t, & t \in \mathrm{R} \\ z = -5 + t \end{cases}$$

Pr. 11

Napíš parametrické vyjadrenie priamky $p = (A\vec{u})$: $A[2; 0; -3]$, $\vec{u} = (-2; 4; 0)$.

p: $X = A + t\vec{u}$, kde $t \in \mathrm{R}$

$$p: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 4t, & t \in \mathrm{R} \\ z = -3 \end{cases}$$

Pr. 12

Napíš parametrické vyjadrenie roviny $\rho = \leftrightarrow ABC$: $A[1; 3; -1]$, $B[2; 3; 3]$, $C[-2; -5; -7]$.

ρ: $X = A + t(B - A) + s(C - A)$, kde $t, s \in \mathrm{R}$

$$\rho: \begin{cases} x = 1 + t - 3s \\ y = 3 - 8s & t, s \in \mathrm{R} \\ z = -1 + 4t - 6s \end{cases}$$

Všeobecná rovnica roviny

Vylúčením parametrov z parametrických rovníc roviny ρ dostaneme tzv. **VŠEOBECNÚ ROVNICU ROVINY** ρ: $ax + by + cz + d = 0$, pričom $a, b, c \in \mathrm{R} \wedge [a, b, c] \neq [0, 0, 0]$.

x, y, z sú súradnice ľubovoľného bodu roviny.

Pr. 13

Napíš všeobecnú rovnicu roviny ρ, ak je táto rovina daná parametricky

$$\rho: \begin{cases} x = 1 + t - 3s \\ y = 3 - 8s & t, s \in \mathrm{R}. \\ z = -1 + 4t - 6s \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 + t - 3s \quad / \cdot (-4) \\ y &= 3 - 8s \\ z &= -1 + 4t - 6s \\ \hline -4x + z &= -5 + 6s \quad / \cdot 4 \\ y &= 3 - 8s \quad / \cdot 3 \\ \hline \end{aligned}$$

$$-16x + 3y + 4z + 11 = 0$$

$$\rho: 16x - 3y - 4z - 11 = 0$$

Pr. 14

Napíš všeobecnú rovnicu roviny ρ, ak je táto rovina daná parametricky

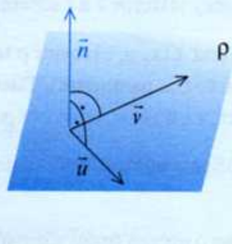
$$\rho: \begin{cases} x = 2 + t + s \\ y = -2 - t - s & t, s \in \mathrm{R}. \\ z = 3 + 2t + 3s \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 2 + t + s \\ y &= -2 - t - s \\ z &= 3 + 2t + 3s \\ \hline \end{aligned}$$

$$\rho: x + y = 0$$

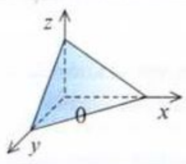
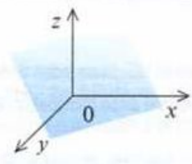
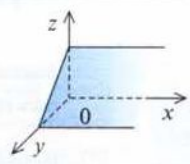
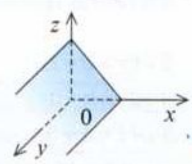
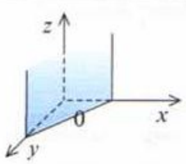
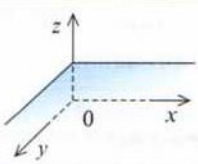
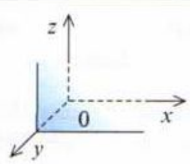
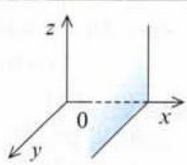
Normálový vektor roviny

Dá sa dokázať, že koeficienty a, b, c vo všeobecnej rovnici roviny ρ : $ax + by + cz + d = 0$ sú súradnicami **NORMÁLOVÉHO VEKTORA** $\vec{n}(a, b, c)$ roviny ρ.



Zvláštne polohy rovín

Súvislosť hodnôt koeficientov a, b, c všeobecnej rovnice roviny so zvláštnymi polohami rovín:

$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$ $ax + by + cz + d = 0$ Rovina je rôznobežná s rovinami xy, xz, yz a neprechádza začiatkom sústavy súradníc.	$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d = 0$ $ax + by + cz = 0$ Rovina je rôznobežná s rovinami xy, xz, yz a prechádza začiatkom sústavy súradníc.	$a = 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$ $by + cz + d = 0$ Rovina je rovnobežná s osou x. Ak sa aj $d = 0$, tak rovina obsahuje os x a má rovnicu $by + cz = 0$.	$a \neq 0, b = 0, c \neq 0, d \neq 0$ $ax + cz + d = 0$ Rovina je rovnobežná s osou y. Ak sa aj $d = 0$, tak rovina obsahuje os y a má rovnicu $ax + cz = 0$.
			
$a \neq 0, b \neq 0, c = 0, d \neq 0$ $ax + by + d = 0$ Rovina je rovnobežná s osou z. Ak sa aj $d = 0$, tak rovina obsahuje os z a má rovnicu $ax + by = 0$.	$a = 0, b = 0, c \neq 0, d \neq 0$ $cz + d = 0$ Rovina je rovnobežná s rovinou xy. Ak sa aj $d = 0$, tak je to rovina xy.	$a = 0, b \neq 0, c = 0, d \neq 0$ $by + d = 0$ Rovina je rovnobežná s rovinou xz. Ak sa aj $d = 0$, tak je to rovina xz.	$a \neq 0, b = 0, c = 0, d \neq 0$ $ax + d = 0$ Rovina je rovnobežná s rovinou yz. Ak sa aj $d = 0$, tak je to rovina yz.
			

Vzájomná poloha bodu a roviny

Bod je prvkom roviny, ak po dosadení jeho súradníc do rovnice roviny dostaneme pravdivú rovnosť. Bod nie je prvkom roviny, ak po dosadení jeho súradníc do rovnice roviny dostaneme nepravdivú rovnosť.

Vzájomná poloha dvoch priamok v priestore

Priamky môžu byť v priestore rovnobežné rôzne, totožné, rôznobežné alebo mimobežné (neležia v jednej rovine).

Pr. 15

Dané sú body $A[0; 3; 0]$, $B[2; 3; 0]$, $E[0; 3; 4]$, $G[2; 0; 4]$, $H[0; 0; 4]$.
Urči vzájomnú polohu priamok:

a) $\leftrightarrow AH$, $\leftrightarrow BG$
b) $\leftrightarrow BG$, $\leftrightarrow HG$
c) $\leftrightarrow AH$, $\leftrightarrow EB$

a) $\leftrightarrow AH: X = A + t(H - A),\ t \in \mathrm{R}$; $\leftrightarrow BG: X = B + r(G - B),\ r \in \mathrm{R}$

$$x = 0 + 0t \qquad y = 3 - 3t \qquad z = 0 + 4t \qquad \vec{u} = (0; -3; 4)$$

Smerové vektory oboch priamok sú rovnaké, priamky sú teda buď rovnobežné rôzne, alebo totožné.

$$x = 2 + 0r \qquad y = 3 - 3r \qquad z = 0 + 4r \qquad \vec{v} = (0, -3, 4)$$

Zistíme, či bod $B \in \leftrightarrow BG$ neleží aj na priamke $\leftrightarrow AH$.

$$\left.\begin{aligned} 2 &= 0 + 0t \Rightarrow t = 2 \\ 3 &= 3 - 3t \Rightarrow t = 0 \\ 0 &= 0 + 4t \Rightarrow t = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow B \notin \leftrightarrow AH$$

Dané priamky sú rovnobežné a rôzne.

b) $\leftrightarrow BG: \begin{cases} x = 2 + 0r \\ y = 3 - 3r \quad r \in \mathrm{R} \\ z = 0 + 4r \end{cases}$ $\qquad \leftrightarrow HG: \begin{cases} x = 0 + 2s \\ y = 0 + 0s \quad s \in \mathrm{R} \\ z = 4 + 0s \end{cases}$

$\vec{u} = (0; -3; 4)$ $\qquad \vec{v} = (2; 0; 0)$

$$\begin{aligned} 2 + 0r &= 0 + 2s \\ 3 - 3r &= 0 + 0s \\ 0 + 4r &= 4 + 0s \end{aligned}$$

Smerové vektory nie sú násobkom jeden druhého, priamky teda nie sú rovnobežné, môžu byť len mimobežné alebo rôznobežné. Porovnáme jednotlivé súradnice.

$$\begin{aligned} 0r + 2s &= 2 \quad \Rightarrow s = 1 \\ -3r - 0s &= -3 \quad \Rightarrow r = 1 \\ 4r - 0s &= 4 \qquad ③ \end{aligned}$$

Hodnoty $s = 1$, $r = 1$ dosadíme do rovnice ③. Z rovnice sa stáva pravdivá rovnosť, teda sústava má jediné riešenie $[r, s] = [1, 1]$ a z toho vyplýva, že priamky sú rôznobežné.

$$\begin{aligned} x &= 2 + 0 \cdot 1 = 2 \\ y &= 3 - 3 \cdot 1 = 0 \\ z &= 0 + 4 \cdot 1 = 4 \end{aligned}$$

Určíme priesečník dosadením $r = 1$ do rovníc priamky BG. Rovnaké hodnoty by sme získali dosadením $s = 1$ do rovníc priamky HG.

Priamky $\leftrightarrow BG$ a $\leftrightarrow HG$ sú rôznobežné a ich priesečníkom je bod $G[2; 0; 4]$.

c) $\leftrightarrow AH: \begin{cases} x = 0 + 0t \\ y = 3 - 3t \quad t \in \mathrm{R} \\ z = 0 + 4t \end{cases}$ $\qquad \leftrightarrow EB: \begin{cases} x = 0 + 2r \\ y = 3 + 0r \quad r \in \mathrm{R} \\ z = 4 - 4r \end{cases}$

$\vec{u} = (0; -3; 4)$ $\qquad \vec{v} = (2; 0; -4)$

$$\begin{aligned} 0 + 0t &= 0 + 2r \\ 3 - 3t &= 3 + 0r \\ 0 + 4t &= 4 - 4r \end{aligned}$$

Smerové vektory nie sú násobkom jeden druhého, priamky teda nie sú rovnobežné, môžu byť len mimobežné alebo rôznobežné. Porovnáme jednotlivé súradnice.

$$\begin{aligned} 0t - 2r &= 0 \quad \Rightarrow r = 0 \\ -3t - 0r &= 0 \quad \Rightarrow t = 0 \\ 4t + 4r &= 4 \qquad ③ \end{aligned}$$

Hodnoty $r = 0$, $t = 0$ dosadíme do rovnice ③. Rovnica ③ nie je po dosadení rovnosťou $4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \neq 4$, teda sústava nemá riešenie a priamky nemajú spoločný bod.

Priamky sú mimobežné.

Pr. 16

Urči vzájomnú polohu priamok $p: \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - 3t \quad \wedge t \in \mathrm{R}; \\ z = 4t \end{cases}$ $\quad q: \begin{cases} x = 0 \\ y = 3r \quad \wedge r \in \mathrm{R} \\ z = 4 - 4r \end{cases}$

$\vec{u} = (0; -3; 4)$ $\qquad \vec{v} = (0; 3; -4)$

Smerové vektory oboch priamok sú navzájom opačné, priamky sú teda buď rovnobežné rôzne, alebo totožné.

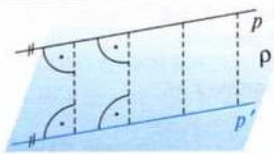
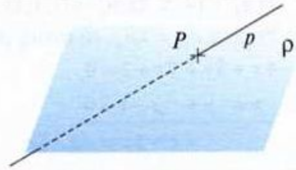
Zistíme, či bod $[0; 0; 4] \in q$ neleží aj na priamke p.

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 0 \\ 0 &= 3 - 3t \Rightarrow t = 0 \\ 0 &= 4t \quad \Rightarrow t = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{priamky majú spoločný bod}$$

Priamky sú totožné.

Vzájomná poloha priamky a roviny

Pri zisťovaní vzájomnej polohy priamky p a roviny ρ môžu nastať tieto prípady:

Priamka p je rovnobežná s rovinou ρ, teda $p \cap \rho = \emptyset$. Píšeme $p \parallel \rho$.	Priamka p leží v rovine ρ, teda $p \cap \rho = p$. Píšeme $p \subset \rho$.	Priamka p je rôznobežná s rovinou ρ, teda $p \cap \rho = \{P\}$, bod P je priesečník priamky p s rovinou ρ.
		

Všetky tieto situácie zisťujeme tak, že hľadáme spoločné body oboch útvarov. Ak je rovina daná všeobecnou rovnicou a priamka parametrickým vyjadrením, tak dosadíme do všeobecnej rovnice roviny parametrické rovnice priamky. Dostaneme tak jednu lineárnu rovnicu s jednou neznámou (parametrom) a tým aj tri možné riešenia.

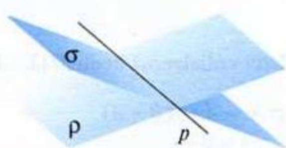
Táto rovnica buď:

- nemá riešenie (priamka je s rovinou rovnobežná), alebo má
- nekonečne mnoho riešení (priamka leží v rovine),
- jediné riešenie (priamka rovinu pretína, je s ňou rôznobežná).

Ak je rovina daná parametrickými rovnicami, určíme napríklad najprv obecnú rovnicu roviny a ďalej postupujeme rovnako.

Vzájomná poloha dvoch rovín

Pri zisťovaní vzájomnej polohy dvoch rovín ρ a σ môžu nastať tieto prípady:

Roviny ρ a σ sú rovnobežné, teda $\rho \cap \sigma = \emptyset$. Píšeme $\rho \parallel \sigma$.	Roviny ρ a σ sú totožné, teda $\rho \cap \sigma = \rho = \sigma$. Píšeme $\rho = \sigma$.	Roviny ρ a σ sú rôznobežné, teda $\rho \cap \sigma = p$, pričom p je spoločná priamka (priesečnica) oboch rovín.
		

Ak sú obe roviny určené všeobecnou rovnicou, riešime pri hľadaní spoločných bodov sústavu dvoch rovníc s tromi neznámymi. Jednu z neznámych považujeme za parameter a riešime sústavu dvoch rovníc s dvoma neznámymi s parametrom. Túto sústavu riešime len vtedy, ak normálové vektory oboch rovín nie sú násobkom jeden druhého, pretože v takom prípade sú roviny buď rovnobežné rôzne, alebo totožné.

Pr. 16

Urči vzájomnú polohu rovín ρ a σ, ak:
a) $\rho: 5x+3y-z-6=0,\ \sigma: 5x+3y-z-3=0$
b) $\rho: 5x+3y-z-16=0,\ \sigma: -10x-6y+2z+32=0$
c) $\rho: 4x+5y+7z+2=0,\ \sigma: x+y+z-1=0$

a) $\vec{n}_\rho=(5,3,-1),\ \vec{n}_\sigma=(5,3,-1),\ d_1=-6,\ d_2=-3$

Pretože $\vec{n}_\rho=\vec{n}_\sigma \wedge d_1\neq d_2$, sú roviny ρ a σ rovnobežné rôzne.

b) $\vec{n}_\rho=(5,3,-1),\ \vec{n}_\sigma=(-10,-6,2),\ d_1=-16,\ d_2=+32$

Pretože $-2\vec{n}_\rho=\vec{n}_\sigma \wedge -2d_1=d_2$, sú roviny ρ a σ totožné.

c) $\vec{n}_\rho=(4,5,7),\ \vec{n}_\sigma=(1,1,1),\ d_1=2,\ d_2=-1$

Pretože $\vec{n}_\rho\neq k\vec{n}_\sigma$, sú roviny ρ a σ rôznobežné.

Určíme ich priesečnicu.

$$4x+5y+7z+2=0$$
$$x+y+z-1=0$$

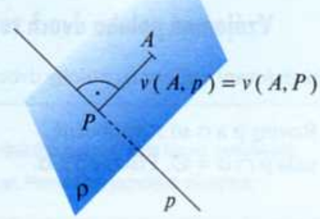
Zvolíme parameter $z=r$.

$$4x+5y=-2-7r$$
$$x+y=1-r \quad /\cdot(-4) \quad /\cdot(-5)$$
$$y=-6-3r$$
$$x=7+2r$$

$$\rho\cap\sigma=p:\begin{cases}x=7+2r\\ y=-6-3r, & r\in\mathrm{R}\\ z=r\end{cases}$$

Vzdialenosť bodu od priamky v priestore

VZDIALENOSŤ BODU A OD PRIAMKY p hľadáme tak, že bodom A vedieme rovinu ρ kolmú na priamku p. Určíme priesečník P priamky p a roviny ρ. Vzdialenosť $v(A,p)=v(A,P)$.



Pr. 17

Urči vzdialenosť bodu $M[3;-1;4]$ od priamky $p=\leftrightarrow AB$, pričom $A[0;2;1]$, $B[1;3;0]$.

Určíme parametrické vyjadrenie priamky p a z nej smerový vektor.

$$p: X=A+t(B-A)$$

$$p:\begin{cases}x=0+t\\ y=2+t & t\in\mathrm{R}\\ z=1-t\end{cases} \Rightarrow \vec{u}=(1;1;-1)$$

Zapíšeme predpokladaný tvar rovnice roviny.

$$\rho\perp p: x+y-z+d=0$$
$$M\in\rho \Leftrightarrow 3-1-4+d=0$$
$$d=2$$
$$\rho: x+y-z+2=0$$

Vypočítame priesečník priamky a roviny.

$$p\cap\rho: t+2+t-1+t+2=0$$
$$3t=-3$$
$$t=-1$$
$$p\cap\rho=\{P[-1;1;2]\}$$

j je jednotka.

$$v(M,p)=v(M,P)=\sqrt{(-4)^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}\ \mathrm{j}$$

Vzdialenosť bodu od roviny

VZDIALENOSŤ BODU $A[x_A, y_A, z_A]$ OD ROVINY ρ: $ax + by + cz + d = 0$

je $v(A, \rho) = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín

VZDIALENOSŤ DVOCH ROVNOBEŽNÝCH ROVÍN ρ a σ, pričom

ρ: $ax + by + cz + d_1 = 0$, σ: $ax + by + cz + d_2 = 0$,

je $v(\rho, \sigma) = \dfrac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Odchýlka dvoch priamok v priestore

O ODCHÝLKE α DVOCH PRIAMOK p a q, pričom

$$p: \begin{cases} x = x_A + tu_1 \\ y = y_A + tu_2, \\ z = z_A + tu_3 \end{cases} t \in \mathrm{R} \text{ a } q: \begin{cases} x = x_B + sv_1 \\ y = y_B + sv_2, \\ z = z_B + sv_3 \end{cases} s \in \mathrm{R},$$

platí: $\cos\alpha = \dfrac{|u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\,\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$.

Odchýlka dvoch rovín

O ODCHÝLKE α DVOCH ROVÍN ρ a σ, pričom

ρ: $a_1 x + b_1 x + c_1 z + d_1 = 0$ a σ: $a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$,

platí: $\cos\alpha = \dfrac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$.

Odchýlka priamky od roviny

O ODCHÝLKE α PRIAMKY p OD ROVINY ρ, pričom

$$p: \begin{cases} x = x_A + tu_1 \\ y = y_A + tu_2, \\ z = z_A + tu_3 \end{cases} t \in \mathrm{R} \text{ a } \rho: ax + by + cz + d = 0,$$

platí: $\sin\alpha = \cos\beta = \dfrac{|au_1 + bu_2 + cu_3|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$.

Pr. 18

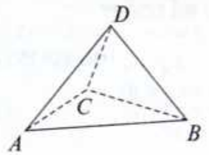
Daný je štvorsten $ABCD$, pričom $A[0; 1; 3]$, $B[1; 0; 2]$, $C[-2; -1; 5]$, $D[0; -2; -6]$.

a) Urči odchýlku priamky AD a roviny $\rho = \leftrightarrow ABC$.

b) Urči odchýlku rovín $\rho = \leftrightarrow ABC$ a $\sigma = \leftrightarrow ABD$.

c) Urči obsah steny ABC.

d) Urči objem štvorstena $ABCD$.



a) $\overrightarrow{AD} = D - A = (0, -3, -9)$

$\rho = \leftrightarrow ABC: X = A + t(B - A) + s(C - A)$

$$\begin{aligned} x &= 0 + t - 2s \\ y &= 1 - t - 2s \\ z &= 3 - t + 2s \end{aligned} \qquad \oplus \qquad t, s \in \mathrm{R}$$

$\rho: x + z - 3 = 0, \vec{n}_\rho = (1, 0, 1)$

$$\alpha = 90° - \beta,\ \cos\beta = \frac{|-9|}{\sqrt{2}\sqrt{90}} = \frac{9}{\sqrt{180}} \Rightarrow \beta = 47°\,52'$$

$\alpha = 90° - 47°\,52' = 42°\,8'$

b) $\rho = \leftrightarrow ABC: x + z - 3 = 0,\ \vec{n}_\rho = (1, 0, 1)$

$\sigma = \leftrightarrow ABD: X = A + t(B - A) + s(D - A)$

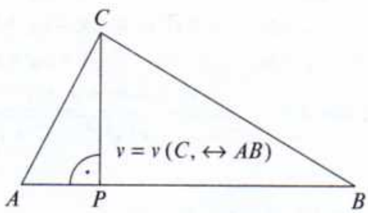
$$\begin{aligned} x &= 0 + t \\ y &= 1 - t - 3s \\ z &= 3 - t - 9s \end{aligned} \qquad \oplus \qquad t, s \in \mathrm{R}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 1 - 3s \quad / \cdot (-3) \\ x + z &= 3 - 9s \end{aligned} \qquad \oplus$$

$\sigma: 2x + 3y - z = 0,\ \vec{n}_\sigma = (2; 3; -1)$

$$\cos\alpha = \frac{|2-1|}{\sqrt{2}\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{28}} \Rightarrow \alpha = 79°\,6'$$

c) $$S_{\Delta ABC} = \frac{|AB| \cdot v(C, \leftrightarrow AB)}{2}$$



$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, -1) \Rightarrow |AB| = \sqrt{3}$

$$\leftrightarrow AB: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \qquad t \in \mathrm{R} \\ z = 3 - t \end{cases}$$

$\rho \perp \leftrightarrow AB \Leftrightarrow \rho: x - y - z + d = 0$

$C \in \rho \Leftrightarrow -2 + 1 - 5 + d = 0$

$d = 6$

$\rho: x - y - z + 6 = 0$

$\leftrightarrow AB \cap \rho = \{P\}: \quad t - (1 - t) - (3 - t) + 6 = 0$

$$t = -\frac{2}{3}$$

Dosadíme za parameter t do rovníc priamky.

$$P\left[-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right]$$

$$v(C, \leftrightarrow AB) = v(C, P) = \sqrt{\left(-2 + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(-1 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(5 - \frac{11}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{6}}{2 \cdot 3} = 2\sqrt{2}\ \mathrm{j}^2$$

d) $$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot v(D, \rho)$$

$\rho: x + z - 3 = 0;\ D[0; -2; -6]$

$$v(D, \rho) = \frac{|-6-3|}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{9}{\sqrt{2}} = 6\ \mathrm{j}^3$$

34. Kužeľosečky

Obsah kapitoly:

Pojem kužeľosečka

Pojem KUŽEĽOSEČKA vznikol ako názov množín bodov v priestore, ktoré vzniknú prienikom roviny a kužeľovej plochy.

Definícia kužeľosečiek

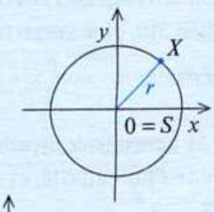
V rovine E_2 je daný bod S a kladné číslo $r \in \mathbb{R}$. KRUŽNICA je množina všetkých bodov X v rovine E_2, ktoré sú od bodu S vzdialené r ($r = |SX|$). Bod S sa nazýva STRED KRUŽNICE, číslo r sa nazýva POLOMER KRUŽNICE.

V rovine E_2 sú dané dva rôzne body F a G. ELIPSA je množina všetkých bodov X v rovine E_2, ktoré majú od bodov F a G konštantný súčet vzdialeností (väčší ako vzdialenosť bodov F a G), t. j. $|FX| + |GX| = 2a$ konštanta. Body F a G sa nazývajú OHNISKÁ ELIPSY, $|FG| = 2e$, $a > e$.

V rovine E_2 je daný bod F a priamka d ($F \notin d$). PARABOLA je množina všetkých bodov X v rovine, ktorých vzdialenosť od bodu F je rovnaká ako vzdialenosť od priamky d. Bod F sa nazýva OHNISKO PARABOLY, priamka d sa nazýva URČUJÚCA (riadiaca) PRIAMKA PARABOLY.

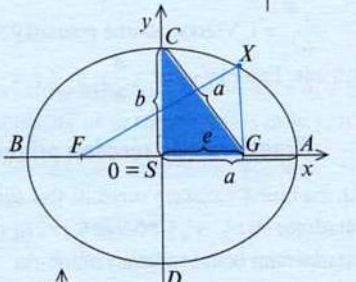
V rovine E_2 sú dané dva rôzne body F a G. HYPERBOLA je množina všetkých bodov X v rovine E_2, ktorých rozdiel vzdialeností od bodov F a G je konštantný (menší ako vzdialenosť bodov F a G), t. j. $\big||FX| - |GX|\big| = 2a$ (konštanta). Body F a G sa nazývajú OHNISKÁ HYPERBOLY, $|FG| = 2e$, $a < e$.

Stredové (vrcholové) rovnice kužeľosečiek pre $S[0, 0]$ ($V[0, 0]$)



Kružnica

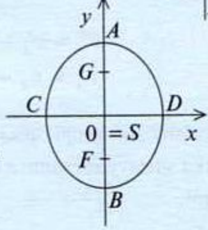
Ak má kružnica stred $S[0, 0]$ a polomer r, tak $x^2 + y^2 = r^2$ je STREDOVÁ ROVNICA KRUŽNICE.



Elipsa

Nech umiestnenie elipsy je rovnaké ako na vedľajšom obrázku, čiže $F[-e, 0]$, $G[e, 0]$, tak $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ je STREDOVÁ ROVNICA ELIPSY.

Kladné číslo e sa nazýva EXCENTRICITA (výstrednosť) ELIPSY. Body $A[a, 0]$, $B[-a, 0]$ sú HLAVNÉ VRCHOLY ELIPSY, kladné číslo a je dĺžka HLAVNEJ POLOSI ELIPSY. Body $C[0, b]$, $D[0, -b]$ sú VEDĽAJŠIE VRCHOLY ELIPSY, kladné číslo b je dĺžka VEDĽAJŠEJ POLOSI ELIPSY. Bod $S[0, 0]$ je STRED ELIPSY. Platí $e^2 = a^2 - b^2$, $a > b$.



$\leftrightarrow AB$ hlavná os elipsy

$\leftrightarrow CD$ vedľajšia os elipsy

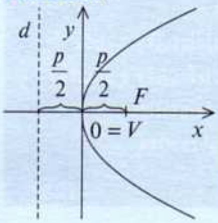
Ak umiestnenie elipsy je rovnaké ako na vedľajšom obrázku, čiže $F[0, -e]$, $G[0, e]$, tak STREDOVÁ ROVNICA ELIPSY má tvar $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$.

Všetky ostatné poznatky sú obdobné ako v predchádzajúcom prípade.

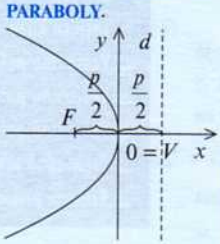
Parabola

V je vrchol paraboly, kladné číslo p nazývame **PARAMETER**, d je určujúca priamka, F je ohnisko paraboly a priamka VF **OS PARABOLY**.

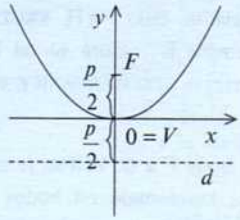
Ak $V[0, 0]$, $F\left[\frac{p}{2}, 0\right]$, d: $x = -\frac{p}{2}$, tak $y^2 = 2px$ je **VRCHOLOVÁ ROVNICA PARABOLY**.



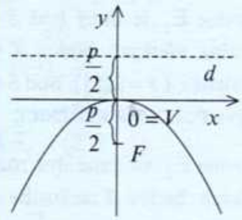
Ak $V[0, 0]$, $F\left[-\frac{p}{2}, 0\right]$, d: $x = \frac{p}{2}$, tak $y^2 = -2px$ je **VRCHOLOVÁ ROVNICA PARABOLY**.



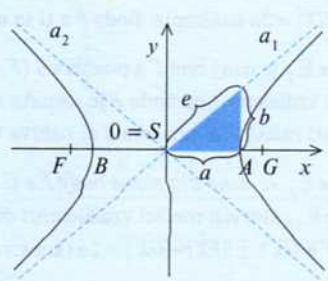
Ak $V[0, 0]$, $F\left[0, \frac{p}{2}\right]$, d: $y = -\frac{p}{2}$, tak $x^2 = 2py$ je **VRCHOLOVÁ ROVNICA PARABOLY**.



Ak $V[0, 0]$, $F\left[0, -\frac{p}{2}\right]$, d: $y = \frac{p}{2}$, tak $x^2 = -2py$ je **VRCHOLOVÁ ROVNICA PARABOLY**.



Hyperbola



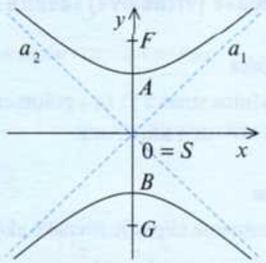
Nech umiestnenie hyperboly je rovnaké ako na vedľajšom obrázku, čiže $F[-e, 0]$, $G[e, 0]$, tak $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ je **STREDOVÁ ROVNICA HYPERBOLY**.

Kladné číslo e sa nazýva **EXCENTRICITA** (výstrednosť) **HYPERBOLY**.

Body $A[a, 0]$, $B[-a, 0]$ sú **HLAVNÉ VRCHOLY HYPERBOLY**, kladné číslo a je dĺžka **HLAVNEJ POLOSI HYPERBOLY**. Kladné číslo b je dĺžka **VEDĽAJŠEJ POLOSI HYPREBOLY**.

Bod $S[0, 0]$ je **STRED HYPERBOLY**. Platí $e^2 = a^2 + b^2$.

Priamky a_1: $y = \frac{b}{a}x$, a_2: $y = -\frac{b}{a}x$ sú **ASYMPTOTY HYPERBOLY**.



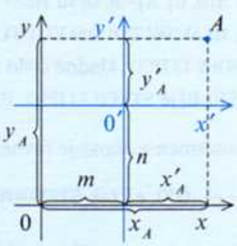
$\leftrightarrow AB$ hlavná os hyperboly

Ak umiestnenie hyperboly je rovnaké ako na vedľajšom obrázku, čiže $F[0, -e]$, $G[0, e]$, tak **STREDOVÁ ROVNICA HYPERBOLY** má tvar $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. Všetky ostatné poznatky sú obdobné ako v predchádzajúcom prípade. Priamky a_1: $y = \frac{a}{b}x$, a_2 : $y = -\frac{a}{b}x$ sú **ASYMPTOTY HYPERBOLY**.

Transformácia súradníc pri rovnobežnom posúvaní

Ak má bod A v sústave súradníc $0xy$ súradnice $A[x_A, y_A]$ a v sústave $0'x'y'$ súradnice $A[x'_A, y'_A]$, pričom $0'[m, n]$ v $0xy$ a $x \| x'$, $y \| y'$, tak medzi súradnicami bodu A platia vzťahy:

$x_A = x'_A + m$ $y_A = y'_A + n$	$x'_A = x_A - m$ $y'_A = y_A - n$

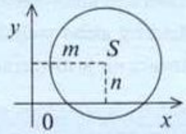


Tieto transformačné vzťahy umožňujú opísať i kužeľosečky, ktoré nemajú vrchol (stred) v začiatku sústavy súradníc a ktorých osi sú rovnobežné so súradnicovými osami.

Stredové (vrcholové) rovnice kužeľosečiek pre $S[m, n]$ ($V[m, n]$) a všeobecné rovnice kužeľosečiek

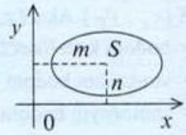
Kružnica

Ak je bod $S[m, n]$ stred kružnice a kladné číslo r polomer kružnice, tak $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ je **STREDOVÁ ROVNICA KRUŽNICE** a $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + p = 0$, pričom $p = m^2 + n^2 - r^2$ je **VŠEOBECNÁ ROVNICA KRUŽNICE**. Zároveň však $m^2 + n^2 - p > 0$, pretože v opačnom prípade by rovnica nebola rovnicou kružnice.



Elipsa

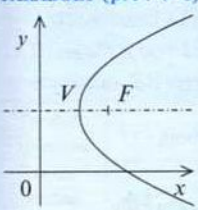
Ak je bod $S[m, n]$ stred elipsy a kladné čísla a, b $(a > b)$ sú dĺžky jej polosí, tak $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ je **STREDOVÁ ROVNICA ELIPSY** a $px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0$, pričom $pq > 0$ je **VŠEOBECNÁ ROVNICA ELIPSY**. Ak sa $p = q$, tak elipsa je rovnoosová, čiže kružnica. Ak je hlavná os elipsy rovnobežná s osou x a vedľajšia os je rovnobežná s osou y, tak postupujeme obdobne.



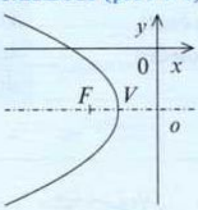
Parabola

Ak je bod $V[m, n]$ vrchol paraboly, kladné číslo $2p$ jej parameter a os paraboly o rovnobežná:

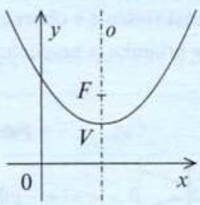
s kladným smerom osi x, tak $(y-n)^2 = 2p(x-m)$ je **VRCHOLOVÁ ROVNICA PARABOLY** a $y^2 + 2rx + 2sy + t = 0$ je **VŠEOBECNÁ ROVNICA PARABOLY** (pre $r \neq 0$).



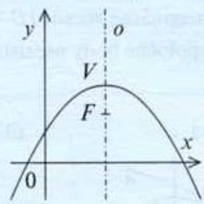
so záporným smerom osi x, tak $(y-n)^2 = -2p(x-m)$ je **VRCHOLOVÁ ROVNICA PARABOLY** a $y^2 + 2rx + 2sy + t = 0$ je **VŠEOBECNÁ ROVNICA PARABOLY** (pre $r \neq 0$).



s kladným smerom osi y, tak $(x-m)^2 = 2p(y-n)$ je **VRCHOLOVÁ ROVNICA PARABOLY** a $x^2 + 2rx + 2sy + t = 0$ je **VŠEOBECNÁ ROVNICA PARABOLY** (pre $s \neq 0$).

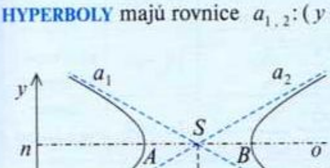


so záporným smerom osi y, tak $(x-m)^2 = -2p(y-n)$ je **VRCHOLOVÁ ROVNICA PARABOLY** a $x^2 + 2rx + 2sy + t = 0$ je **VŠEOBECNÁ ROVNICA PARABOLY** (pre $s \neq 0$).

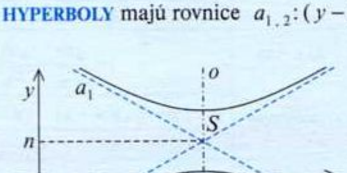


Hyperbola

Ak je bod $S[m, n]$ stred hyperboly, kladné čísla a, b sú dĺžky jej polosí a hlavná os je rovnobežná s osou x, tak $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} - \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ je **STREDOVÁ ROVNICA HYPERBOLY** a $px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0$, pričom $pq < 0$ je **VŠEOBECNÁ ROVNICA HYPERBOLY. ASYMPTOTY HYPERBOLY** majú rovnice $a_{1,2}: (y-n) = \pm\dfrac{b}{a}(x-m)$.



Ak je bod $S[m, n]$ stred hyperboly, kladné čísla a, b sú dĺžky jej polosí a hlavná os je rovnobežná s osou y, tak $\dfrac{(y-n)^2}{a^2} - \dfrac{(x-m)^2}{b^2} = 1$ je **STREDOVÁ ROVNICA HYPERBOLY** a $px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t = 0$, pričom $pq < 0$ je **VŠEOBECNÁ ROVNICA HYPERBOLY. ASYMPTOTY HYPERBOLY** majú rovnice $a_{1,2}: (y-n) = \pm\dfrac{a}{b}(x-m)$.



Všeobecnú rovnicu kužeľosečky získame zo stredovej (vrcholovej) rovnice jej úpravou a zavedením nových koeficientov.

Rovnice typu $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ nemusia byť vždy všeobecnými rovnicami kužeľosečiek. Či nimi sú, overujeme tak, že sa ich pokúsime upraviť na stredový alebo vrcholový tvar kužeľosečiek. Ak takáto úprava nie je možná, tak rovnica nie je rovnicou kužeľosečky (pozri riešené príklady na konci tejto kapitoly).

Daná rovnica môže byť rovnicou:
a) kružnice, ak $A = B$,
b) elipsy, ak $AB > 0$,
c) hyperboly, ak $AB < 0$
d) paraboly, ak práve jedno z čísel $A, B = 0$

Vzájomná poloha kužeľosečky a bodu

Daná je všeobecná rovnica kužeľosečky $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ a bod $K[x_K, y_K]$. Ak $f(x_K, y_K) = Ax_K^2 + By_K^2 + Cx_K + Dy_K + E$, tak bod K je:

- bodom kužeľosečky práve vtedy, keď $f(x_K, y_K) = 0$.
- vonkajším bodom kužeľosečky práve vtedy, keď $f(x_K, y_K) > 0$.
- vnútorným bodom kužeľosečky práve vtedy, keď $f(x_K, y_K) < 0$.

Kužeľosečka rozdelí rovinu na dve časti, ktoré nazývame VONKAJŠOK a VNÚTRAJŠOK (vnútro) kužeľosečky. Vnútrom kružnice a elipsy je časť roviny obsahujúca stred týchto kužeľosečiek. Vnútrom paraboly a hyperboly je časť obsahujúca ohniská týchto kužeľosečiek.

Vzájomná poloha kužeľosečky a priamky

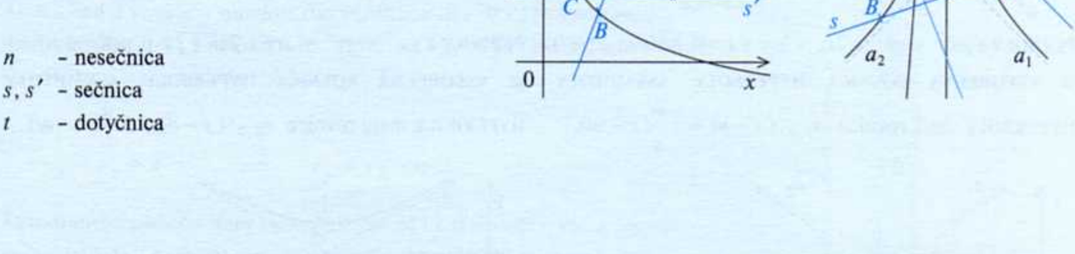
Vzájomnú polohu kužeľosečky a priamky určujeme tak, že zisťujeme počet ich spoločných bodov. V analytickej geometrii riešime sústavu lineárnej rovnice (priamka) a kvadratickej rovnice (kužeľosečka) s dvoma neznámymi. Riešenie tejto sústavy vedie k riešeniu kvadratickej rovnice s jednou neznámou, ktorá môže mať:

- dva rôzne reálne korene ($D > 0$), teda dva rôzne spoločné body, čiže priamka je sečnica kužeľosečky;
- jediný dvojnásobný reálny koreň ($D = 0$), teda jediný spoločný bod, čiže priamka je dotyčnica kužeľosečky;
- dva imaginárne korene ($D < 0$ - nemá riešenie v obore reálnych čísel), teda spoločné body neexistujú, čiže priamka je nesečnica kužeľosečky.

Rovnice dotyčníc kužeľosečiek sú uvedené v prehľadnej tabuľke.

Pre parabolu a hyperbolu môžeme nájsť priamky, ktoré majú s kužeľosečkou spoločný 1 bod a nie sú jej dotyčnicou (viď obrázky).

Kružnica Elipsa Parabola Hyperbola



n - nesečnica
s, s' - sečnica
t - dotyčnica

Vzájomná poloha kužeľosečiek

Vzájomná poloha kužeľosečiek sa opäť určuje podľa počtu spoločných bodov. V analytickej geometrii to znamená riešiť sústavu dvoch kvadratických rovníc s dvoma neznámymi.

Prehľadná tabuľka poznatkov

KUŽEĽOSEČKA	STRED / VRCHOL	STREDOVÁ ROVNICA / VRCHOLOVÁ ROVNICA	ROVNICA DOTYČNICE V BODE $T[x_0, y_0]$	VŠEOBECNÁ ROVNICA
Kružnica	$S[0,0]$	$x^2+y^2=r^2$	$xx_0+yy_0=r^2$	$x^2+y^2-2mx-2ny+p=0$, $p=m^2+n^2-r^2$, $m^2+n^2-p>0$
	$S[m,n]$	$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$	$(x-m)(x_0-m)+(y-n)(y_0-n)=r^2$	
Elipsa (hlavná os rovnobežná s x)	$S[0,0]$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$	$px^2+qy^2+2rx+2sy+t=0$, $pq>0$, $p\neq q$
	$S[m,n]$	$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2}+\frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2}=1$	
Elipsa (hlavná os rovnobežná s y	$S[0,0]$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	$\frac{xx_0}{b^2}+\frac{yy_0}{a^2}=1$	
	$S[m,n]$	$\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1$	$\frac{(x-m)(x_0-m)}{b^2}+\frac{(y-n)(y_0-n)}{a^2}=1$	
Parabola (roztvára sa do kladnej časti osi x)	$V[0,0]$	$y^2=2px$	$yy_0=p(x+x_0)$	$y^2+2rx+2sy+t=0$, $r\neq 0$
	$V[m,n]$	$(y-n)^2=2p(x-m)$	$(y-n)(y_0-n)=p(x+x_0-2m)$	
Parabola (roztvára sa do zápornej časti osi x)	$V[0,0]$	$y^2=-2px$	$yy_0=-p(x+x_0)$	
	$V[m,n]$	$(y-n)^2=-2p(x-m)$	$(y-n)(y_0-n)=-p(x+x_0-2m)$	
Parabola (roztvára sa do kladnej časti osi y)	$V[0,0]$	$x^2=2py$	$xx_0=p(y+y_0)$	$x^2+2rx+2sy+t=0$, $s\neq 0$
	$V[m,n]$	$(x-m)^2=2p(y-n)$	$(x-m)(x_0-m)=p(y+y_0-2n)$	
Parabola (roztvára sa do zápornej časti osi y)	$V[0,0]$	$x^2=-2py$	$xx_0=-p(y+y_0)$	
	$V[m,n]$	$(x-m)^2=-2p(y-n)$	$(x-m)(x_0-m)=-p(y+y_0-2n)$	
Hyperbola (hlavná os rovnobežná s x)	$S[0,0]$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$	$px^2+qy^2+2rx+2sy+t=0$, $pq<0$
	$S[m,n]$	$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2}-\frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2}=1$	asymptoty: $(y-n)=\pm\frac{b}{a}(x-m)$
Hyperbola (hlavná os rovnobežná s y)	$S[0,0]$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	$\frac{yy_0}{a^2}-\frac{xx_0}{b^2}=1$	$px^2+qy^2+2rx+2sy+t=0$, $pq<0$
	$S[m,n]$	$\frac{(y-n)^2}{a^2}-\frac{(x-m)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-n)(y_0-n)}{a^2}-\frac{(x-m)(x_0-m)}{b^2}=1$	asymptoty: $(y-n)=\pm\frac{a}{b}(x-m)$

Ak má kužeľosečka rovnicu v tvare $y^2+2rx+2sy+t=0$, rovnica jej dotyčnice je: $yy_0+rx+rx_0+sy+sy_0+t=0$.

Riešené príklady

Kružnica

Pr. 1

Rozhodni, či nasledujúca rovnica je rovnicou kružnice:

a) $x^2+y^2-8x-4y-5=0$

b) $x^2+y^2-8x-4y+20=0$

c) $3x^2+3y^2+4y-5x+11=0$

a) $x^2+y^2-8x-4y-5=0$

$(x-4)^2-16+(y-2)^2-4-5=0$

$(x-4)^2+(y-2)^2=25$

Táto rovnica je rovnicou kružnice so stredom $S[4;2]$ a polomerom $r=5$.

b) $x^2+y^2-8x-4y+20=0$

$(x-4)^2-16+(y-2)^2-4+20=0$

$(x-4)^2+(y-2)^2=0$

Táto rovnica nie je rovnicou kružnice (polomer r nie je možné určiť).

Tejto rovnici vyhovuje jediný bod $A[4;2]$.

c) $3x^2+3y^2+4y-5x+11=0 \qquad /:3$

$$x^2+y^2+\frac{4}{3}y-\frac{5}{3}x+\frac{11}{3}=0$$

$$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+\frac{11}{3}=0$$

$$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{91}{36}<0$$

Táto rovnica nie je rovnicou kružnice (polomer r nie je možné určiť). Tejto rovnici nevyhovuje žiadny bod.

Aby sme mohli rozhodnúť, či ide o rovnicu kružnice, musíme ju upraviť na stredový tvar. Upravíme ju metódou „doplnenia na štvorec".

Pr. 2

Zisti polohu bodu $A[-2;1]$ vzhľadom na kružnicu danú rovnicou:

a) $k: x^2+y^2=25$

b) $k: x^2+y^2=5$

c) $k: x^2+y^2-6x-8y=0$

a) $f(x,y)=x^2+y^2-25$

$f(-2,1)=4+1-25=-20<0$

Bod je vnútorným bodom kružnice.

b) $f(x,y)=x^2+y^2-5$

$f(-2,1)=4+1-5=0$

Bod leží na kružnici.

c) $f(x,y)=x^2+y^2-6x-8y$

$f(-2,1)=4+1+12-8=9>0$

Bod je vonkajším bodom kružnice.

Pr. 3

Urči rovnicu kružnice opísanej trojuholníku ABC, pričom $A[2;1]$, $B[1;4]$, $C[6;9]$.

$k: x^2+y^2+ax+by+c=0$ — Napíšeme predpokladaný tvar rovnice.

$A\in k \Leftrightarrow \quad 4+1+2a+b+c=0$ — Do rovnice dosadíme postupne súradnice daných troch bodov.

$B\in k \Leftrightarrow \quad 1+16+a+4b+c=0$ — Dostaneme sústavu 3 rovníc s 3 neznámymi, ktorú vyriešime.

$C\in k \Leftrightarrow \quad 36+81+6a+9b+c=0$

$a=-12,\ b=-8,\ c=27$ — Riešenie sústavy rovníc dosadíme do hľadanej rovnice.

$k: x^2+y^2-12x-8y+27=0$

Poznámka: Túto úlohu môžeme riešiť aj pomocou osí úsečiek *AB* a *BC*.

Pr. 4

Urči rovnicu dotyčnice t ku kružnici $k: x^2+y^2-6x+10y+14=0$ v bode dotyku $T[x_0,-3]$.

$k: (x-3)^2+(y+5)^2=20$ — Rovnicu upravíme na stredovú rovnicu kružnice.

$(x_0-3)^2+4=20$ — Určíme súradnicu x_0 bodu dotyku dosadením čísla -3 za y.

$(x_0-3)^2=16$

$x_0-3=\pm4 \Rightarrow x_{01}=7,\ x_{02}=-1$

$T_1\,[7;-3]$, $T_2\,[-1;-3]$ — Existujú dva možné body dotyku.

$t: (x-3)(x_0-3)+(y+5)(y_0+5)=20$ — Napíšeme všeobecnú rovnicu dotyčnice danej kružnice.

$t_1: 2x+y-11=0$

$t_1: 2x-y-1=0$

Dosadíme za x_0, y_0 súradnice bodov dotyku a upravíme rovnice.

Pr. 5

Napíš rovnice dotyčníc ku kružnici k, ktoré sú rovnobežné s priamkou p, ak $k: (x-2)^2+(y+6)^2=13$ a $p: 2x-3y+5=0$.

$t \parallel p \Leftrightarrow t: 2x-3y+c=0$

$$x=\frac{3y-c}{2}$$

$k: x^2+y^2-4x+12y+27=0$ — Upravíme rovnicu kružnice a dosadíme do nej za x.

$13y^2-6y(c-4)+(c^2+8c+108)=0$ — Po úpravách dostaneme kvadratickú rovnicu s neznámou y a parametrom c.

$D=c^2+44c+315=0 \Leftrightarrow c_1=-9, c_2=-35$ — Priamka je dotyčnicou práve vtedy, keď $D=0$.

$t_1: 2x-3y-9=0$

$t_2: 2x-3y-35=0$

Dosadíme za c do rovnice dotyčnice t.

Elipsa

Pr. 6

Napíš rovnicu elipsy, ktorej vrcholmi sú body $A[0;-3]$, $B[0;3]$ a vzdialenosť ohnísk je 8.

$b=3$, $e=4$

$a^2=e^2+b^2=4^2+3^2=25$

$$e: \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

Body A, B môžu byť len vedľajšie vrcholy, preto b je polovina zo vzdialenosti A, B. e je polovina zo vzdialenosti ohnísk.

Využijeme vzťah $e^2=a^2-b^2$ a vypočítame a^2.

Dosadíme za a^2, b^2 do rovnice elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Pr. 7

Napíš rovnicu elipsy, ktorej ohniská ležia na osi y, bod $S[m, n]$ je jej stred, vzdialenosť ohnísk je 6 a dlhšia polos má dĺžku 4.

$e=3$, $a=4$, $b^2=a^2-e^2=16-9=7$, $S[0, n]$

$$e: \frac{(x-0)^2}{7}+\frac{(y-n)^2}{16}=1$$

$$e: \frac{x^2}{7}+\frac{(y-n)^2}{16}=1$$

Pr. 8

Zisti, či daná rovnica je rovnicou elipsy:

a) $9x^2+25y^2-54x-100y-44=0$

b) $9x^2+4y^2-36x+72y+360=0$

a)

$$9(x^2-6x)+25(y^2-4y)-44=0$$
$$9[(x-3)^2-9]+25[(y-2)^2-4]-44=0$$
$$9(x-3)^2-81+25(y-2)^2-100-44=0$$
$$9(x-3)^2+25(y-2)^2=225$$
$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

Táto rovnica je rovnicou elipsy so stredom $S[3;2]$ a polosami $a=5$, $b=3$.

b)

$$9(x^2-4x)+4(y^2+18y)+360=0$$
$$9[(x-2)^2-4]+4[(y+9)^2-81]+360=0$$
$$9(x-2)^2-36+4(y+9)^2-324+360=0$$
$$9(x-2)^2+4(y+9)^2=0$$

Táto rovnica nie je rovnicou elipsy (na pravej strane vyšla 0), rovnici vyhovuje jediný bod $A[2;-9]$.

Pr. 9

Napíš rovnice dotyčníc elipsy v jej priesečníkoch s osou y, ak $e: x^2 + 2y^2 - 8y = 0$.

$T[0, y]$

$T[0, y] \in e \Leftrightarrow 0^2 + 2y^2 - 8y = 0$

$y^2 - 4y = 0$

$y(y-4) = 0$

$y_1 = 0, y_2 = 4$

Určíme priesečníky s osou y, čiže s priamkou $x = 0$, teda body dotyku.

$T_1[0, 0], T_2[0, 4]$

$e: x^2 + 2(y^2 - 4y) = 0$

$x^2 + 2[(y-2)^2 - 4] = 0$

$x^2 + 2(y-2)^2 = 8$

Upravíme rovnicu elipsy.

$$\frac{x^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

Z rovnice vyplýva, že $S[0, 2]$, $a^2 = 8$, $b^2 = 4$, $a > b$.

$$t: \frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} + \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = 1$$

$$t_1: \frac{(x-0)(0-0)}{8} + \frac{(y-2)(0-2)}{4} = 1 \Rightarrow t_1: y = 0$$

$$t_2: \frac{(x-0)(0-0)}{8} + \frac{(y-2)(4-2)}{4} = 1 \Rightarrow t_2: y = 4$$

Napíšeme všeobecnú rovnicu dotyčnice elipsy.

Dosadíme postupne za x_0, y_0 súradnice dotykových bodov i hodnoty a^2, b^2, m, n.

Poznámka: Ak si uvedomíme, že body T_1 a T_2 sú vedľajšie vrcholy elipsy, tak rovnice dotyčníc v týchto bodoch môžeme napísať bez zložitých výpočtov.

Parabola

Pr. 10

Napíš analytické vyjadrenie paraboly, ak je dané ohnisko F a určujúca priamka d:

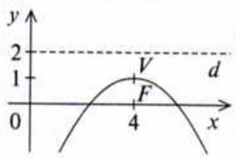
a) $F[4; 0]$, $d: y = 2$ **b)** $F[5; -3]$, $d: y = -1$ **c)** $F[-3; -4]$, $d: y = -8$
d) $F[6; 2]$, $d: x = 8$ **e)** $F[4; 2]$, $d: x = 3$

a) $V[4; 1]$ pozri obrázok

$p = 2$

$2p = 4$

$p: (x-4)^2 = -4(y-1)$

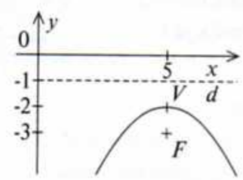


b) $V[5; -2]$

$p = 2$

$2p = 4$

$p: (x-5)^2 = -4(y+2)$

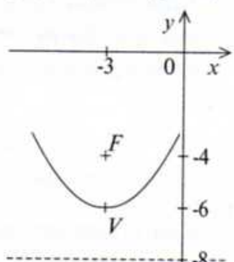


c) $V[-3; -6]$

$p = 4$

$2p = 8$

$p: (x+3)^2 = 8(y+6)$

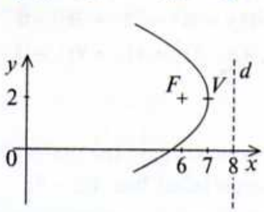


d) $V[7; 2]$

$p = 2$

$2p = 4$

$p: (y-2)^2 = -4(x-7)$

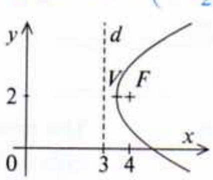


e) $V\left[\frac{7}{2}, 2\right]$

$p = 1$

$2p = 2$

$p: (y-2)^2 = 2\left(x - \frac{7}{2}\right)$



Pr. 11

Urči ohnisko a rovnicu určujúcej priamky paraboly:

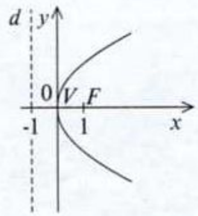
a) $y^2 = 4x$ **b)** $y^2 = 2(x-3)$ **c)** $y^2 = -2(x-3)$

a) $V[0;0]$

$y^2 = 4x \Rightarrow 2p = 4$

$\frac{p}{2} = 1$

$F[1;0]$, $d: x = -1$

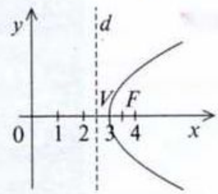


b) $V[3;0]$

$y^2 = 2(x-3) \Rightarrow 2p = 2$

$\frac{p}{2} = \frac{1}{2}$

$F\left[\frac{7}{2}, 0\right]$, $d: x = \frac{5}{2}$

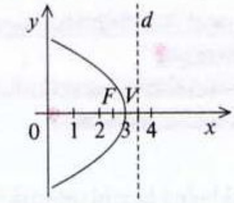


c) $V[3;0]$

$y^2 = -2(x-3) \Rightarrow 2p = 2$

$\frac{p}{2} = \frac{1}{2}$

$F\left[\frac{5}{2}, 0\right]$, $d: x = \frac{7}{2}$



Pr. 12

Daná je trojica bodov $A[2;4]$, $B[-1;7]$, $C[1;3]$. Urči rovnice všetkých parabol, ktoré prechádzajú bodmi A, B, C a majú os rovnobežnú s osou y.

$p: x^2 + ay + bx + c = 0$

Napíšeme predpokladaný tvar rovnice paraboly.

$A \in p \Leftrightarrow 4 + 4a + 2b + c = 0$

$B \in p \Leftrightarrow 1 + 7a - b + c = 0$

$C \in p \Leftrightarrow 1 + 3a + b + c = 0$

Do všeobecnej rovnice dosadíme postupne súradnice bodov ležiacich na parabole. Dostaneme sústavu troch rovníc s troma neznámymi, ktorú vyriešime.

$$\begin{aligned} 4a + 2b + c &= -4 \quad \ominus \quad \ominus \\ 7a - b + c &= -1 \\ 3a + b + c &= -1 \quad ① \\ \hline -3a + 3b &= -3 \\ a + b &= -3 \quad ② \\ \hline -a + b &= -1 \quad \oplus \\ a + b &= -3 \\ \hline 2b &= -4 \\ b &= -2 \end{aligned}$$

$a = -3 - b = -3 + 2 = -1$

Dosadíme za b do rovnice ① a vypočítame a.

$c = -1 - b - 3a = -1 + 2 + 3 = 4$

Dosadíme za b do rovnice ② a vypočítame c.

$x^2 - y - 2x + 4 = 0$

$(x-1)^2 - 1 + 4 = y$

$p: y - 3 = (x-1)^2$

Koeficienty doplníme do predpokladaného tvaru rovnice paraboly a upravíme ju.

Ak by sme hľadali parabolu, ktorá má os rovnobežnú s osou x, postupovali by sme obdobne. Hľadali by sme rovnicu paraboly v tvare $p: y^2 + ax + by + c = 0$.
Výsledkom by bola parabola $p: (y - 4{,}5)^2 = -2(x - 2{,}125)$.

Hyperbola

Úlohy o hyperbole riešime obdobne ako úlohy o kružnici, elipse či parabole.

35. Kombinatorika

Obsah kapitoly:

Obsah kombinatoriky

KOMBINATORIKA sa v stredoškolskej matematike zaoberá vytváraním k-prvkových skupín z n-prvkovej množiny a určovaním počtu týchto skupín. Pri vytváraní skupín sa zohľadňujú nasledujúce zásadné princípy:

- vo vybranej skupine prvkov na ich poradí buď záleží, alebo nezáleží,
- vo vybranej skupine sa prvky buď môžu, alebo nemôžu opakovať.

Na kapitolu 35. Kombinatorika nadväzuje kapitola 36. Pravdepodobnosť a 37. Štatistika, ktoré využívajú aparát opisovaný v kapitole č. 35.

Základné kombinatorické pravidlá

KOMBINATORICKÉ PRAVIDLO SÚČINU: Počet všetkých usporiadaných k-tíc, ktorých prvý člen sa dá vybrať n_1 spôsobmi, druhý člen po výbere prvého n_2 spôsobmi, atď., až k-tý člen po výbere všetkých predchádzajúcich členov n_k spôsobmi, sa rovná $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

KOMBINATORICKÉ PRAVIDLO SÚČTU: Ak $A_1, A_2 \ldots A_n$ sú konečné, navzájom disjunktné množiny majúce $p_1, p_2 \ldots p_n$ prvkov, tak počet prvkov množiny $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ sa rovná $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

Množiny A, B nazývame DISJUNKTNÉ, ak $A \cap B = \emptyset$.

Pri riešení konkrétneho problému využívame obe tieto pravidlá buď samostatne, alebo aj súčasne.

Pr. 1

Urči počet všetkých tých prirodzených dvojciferných čísel, ktoré majú v svojom dekadickom zápise každú číslicu najviac raz.

$p = 9 \cdot 9 = 81$

Hľadaných dvojciferných čísel je 81.

Použijeme pravidlo o súčine. Na mieste desiatok môže byť ľubovoľná číslica číslic 1, 2..., 9 (na tomto mieste nesmie byť 0) – 9 možností. Na mieste jednotiek môže byť 0 alebo ktorákoľvek číslica, ktorá už nebola umiestnená na mieste desiatok – opäť 9 možností.

Iný spôsob riešenia:

Použijeme pravidlo o súčte. Všetky dvojciferné čísla môžeme rozdeliť do dvoch disjunktných množín. V prvej sú všetky dvojciferné čísla s rôznymi ciframi a v druhej dvojciferné čísla s rovnakými ciframi. Je zrejmé, že všetkých dvojciferných čísel je 90 a dvojciferných čísel s rovnakými ciframi je 9 (11, 22, ..., 99). Ak p je počet všetkých dvojciferných čísel s rôznymi ciframi, tak $p + 9 = 90$, čiže $p = 81$.

Definícia $n!$ a $\binom{n}{k}$

Pri výpočtoch v kombinatorických úlohách sa často používa $n!$. Tento symbol nazývame n FAKTORIÁL a definujeme ho takto:
$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120,$
$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040,$
$1! = 1, \quad 10! = 3\,628\,800$

Kvôli stručnejším zápisom bol definovaný symbol $\binom{n}{k}$, ktorý čítame: „n nad k" a nazývame ho KOMBINAČNÉ ČÍSLO, pričom $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pre $0 \le k \le n$.

$0! = 1$ (definované)

Ak používame príručnú kalkulačku, uvedomme si, že kapacita kalkulačky je ohraničená, zvyčajne ešte $69! \doteq 1{,}7112245243 \cdot 10^{98}$, ale už pri 70! je na displeji E (error).

Niektoré vlastnosti a hodnoty kombinačných čísel:

$\binom{n}{1} = n$ $\quad \binom{n}{n} = 1$ $\quad \binom{n}{0} = 1$

$\binom{0}{0} = 1$ $\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Variácie bez opakovania

k-ČLENNÁ VARIÁCIA Z n PRVKOV je usporiadaná k-tica, v ktorej sa nijaké dva prvky neopakujú, z pevne zvolenej n-prvkovej množiny (na poradí prvkov v k-tici teda záleží). Počet všetkých k-členných variácií označujeme $V_k(n)$, pričom
$V_k(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ alebo $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Permutácie bez opakovania

PERMUTÁCIA Z n PRVKOV je n-členná variácia z n prvkov, čo znamená, že do skupiny vyberieme všetkých n prvkov a meníme len ich poradie. Počet všetkých permutácií označujeme $P(n)$, pričom $P(n) = n!$.

$$P(n) = V_n(n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Kombinácie bez opakovania

k-ČLENNÁ KOMBINÁCIA Z n PRVKOV je neusporiadaná k-tica zostavená z týchto n prvkov tak, že každý prvok sa v nej vyskytuje najviac raz. To znamená, že na poradí prvkov v skupine nezáleží. Počet všetkých k-členných kombinácií označujeme $C_k(n)$, pričom
$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{V_k(n)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Medzi počtom všetkých variácií a počtom všetkých kombinácií s rovnakým počtom k vyberaných prvkov z n-prvkovej množiny platí: $V_k(n) = k! \cdot C_k(n)$

Riešené príklady na variácie, permutácie a kombinácie bez opakovania

V nasledujúcich príkladoch využijeme všetky predchádzajúce vzťahy a znalosti. Väčšina príkladov sa dá riešiť viacerými spôsobmi, uvádzame však len jeden, resp. dva.

Príklady na variácie bez opakovania

Pr. 2

Vlajka má byť zložená z troch rôznofarebných vodorovných pruhov. K dispozícii máme biele, červené, modré, zelené a žlté pruhy. Urči:

a) počet rôznych vlajok, ktoré môžeme z týchto pruhov zložiť,

b) počet rôznych vlajok s modrým pruhom,

c) počet rôznych vlajok, ktoré majú modrý pruh v prostriedku,

d) počet rôznych vlajok, ktoré nemajú červený pruh v prostriedku.

a) $p = V_3(5) = \dfrac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Môžeme vyberať 3 farby z 5, záleží na poradí.

Môžeme zložiť 60 vlajok.

b) $p = 3 \cdot V_2(4) = 3 \cdot \dfrac{4!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$

Umiestnime modrý pruh postupne hore, do prostriedku, dole. Ku každej z týchto možností pridáme ešte dva pruhy zo zvyšných 4 farieb (na poradí záleží).

Modrý pruh má 36 vlajok.

c) $p = V_2(4) = \dfrac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$

Ak umiestnime modrý pruh do prostriedku, môžeme k nemu pridať už len 2 farby zo 4.

Modrý pruh v prostriedku má 12 vlajok.

d) $p' = V_2(4) = \dfrac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$

$p = V_3(5) - V_2(4) = 60 - 12 = 48$

Umiestnime červený pruh do prostriedku a obdobne ako v c) dostaneme 12 možností, ktoré však nechceme.

Červený pruh v prostriedku nemá 48 vlajok.

Pr. 3

Urči počet všetkých najviac päťciferných prirodzených čísel, ktorých dekadický zápis obsahuje každú z 10 číslic najviac raz. Koľko z takýchto čísel je menších než 50 000?

Slovo *najviac* pripúšťa jedno-, dvoj-, troj-, štvor- alebo päťciferné čísla. Číslo však nemôže začínať nulou.

$V_1(10) - V_0(9)$ — Určíme počet jednociferných prirodzených čísel.

$V_2(10) - V_1(9)$ — Určíme počet dvojciferných prirodzených čísel.

$V_3(10) - V_2(9)$ — Určíme počet trojciferných prirodzených čísel.

$V_4(10) - V_3(9)$ — Určíme počet štvorciferných prirodzených čísel.

$V_5(10) - V_4(9)$ — Určíme počet päťciferných prirodzených čísel.

Určíme počet najviac päťciferných prirodzených čísel.

$$p = V_1(10) - V_0(9) + V_2(10) - V_1(9) + V_3(10) - V_2(9) + V_4(10) - V_3(9) + V_5(10) - V_4(9) =$$

$$= \left(\frac{10!}{9!} - \frac{9!}{9!}\right) + \left(\frac{10!}{8!} - \frac{9!}{8!}\right) + \left(\frac{10!}{7!} - \frac{9!}{7!}\right) + \left(\frac{10!}{6!} - \frac{9!}{6!}\right) + \left(\frac{10!}{5!} - \frac{9!}{5!}\right) = (10-1) + (10 \cdot 9 - 9) + (10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8) +$$

$$+ (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 - 9 \cdot 8 \cdot 7) + (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 - 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6) =$$

$$= 9 + 81 + 648 + 4\,536 + 27\,216 = 32\,490$$

Čísla, ktoré sú menšie než 50 000, môžu byť všetky jedno-, dvoj-, troj-, štvorciferné a z päťciferných len tie, ktoré začínajú 1 alebo 2, alebo 3, alebo 4.

$$p = (V_1(10) - V_0(9)) + (V_2(10) - V_1(9)) + (V_3(10) - V_2(9)) + (V_4(10) - V_3(9)) + 4 \cdot V_4(9) = 17\,370$$

Určíme počet najviac päťciferných čísel, ktoré sú menšie než 50 000.

Mechanizmus výpočtu $4 \cdot V_4(9)$:

1
• • • • •

2
• • • • •

3
• • • • •

4
• • • • •

Miesta nad bodkami môžeme obsadiť štvoricami z 9 prvkov, v ktorých záleží na poradí, čiže $V_4(9)$ spôsobmi. Pretože takéto možnosti môžu byť 4, je posledný sčítanec $4 \cdot V_4(9)$.

Všetkých najviac päťciferných prirodzených čísel je 32 490. Z nich je 17 370 menších než 50 000.

Pr. 4

Výbor športového klubu tvorí 6 mužov a 4 ženy. Urči, koľkými spôsobmi sa z nich dá vybrať:

a) predseda, podpredseda, tajomník a hospodár,

b) predseda, podpredseda, tajomník a hospodár tak, aby predsedom bol muž a podpredsedom žena, alebo naopak, predsedom bola žena a podpredsedom muž,

c) predseda, podpredseda, tajomník a hospodár tak, aby práve jedným z nich bola žena.

a) $p = V_4(10) = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$

Máme k dispozícii 10 ľudí, z nich chceme vybrať štvoricu, v ktorej záleží na poradí.

Funkcionárov môžeme vybrať 5 040 spôsobmi.

b) $\underset{\text{muž}}{Pr}\ \ \underset{\text{žena}}{Po}\ \ \underbrace{T\ \ H}_{\text{ktokoľvek}}$ alebo $\underset{\text{žena}}{Pr}\ \ \underset{\text{muž}}{Po}\ \ \underbrace{T\ \ H}_{\text{ktokoľvek}}$

$p_1 = V_1(6) \cdot V_1(4) \cdot V_2(8)$ alebo $p_2 = V_1(4) \cdot V_1(6) \cdot V_2(8)$

$p = p_1 + p_2 = 2 \cdot \frac{6!}{5!} \cdot \frac{4!}{3!} \cdot \frac{8!}{6!} = 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 = 2\,688$

Funkcionárov možno vybrať 2 688 spôsobmi.

c) $Pr\ \ \underbrace{Po\ \ T\ \ H}_{\text{ktorákoľvek trojica mužov, záleží na poradí}}$ — Pr: ktorákoľvek žena

$Pr\ \ Po\ \ T\ \ H$ — Po: ktorákoľvek žena

$Pr\ \ Po\ \ T\ \ H$ — T: ktorákoľvek žena

$Pr\ \ Po\ \ T\ \ H$ — H: ktorákoľvek žena

$p = 4 \cdot V_1(4) \cdot V_3(6) = 4 \cdot \frac{4!}{3!} \cdot \frac{6!}{3!} = 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 1\,920$

Funkcionárov možno vybrať 1 920 spôsobmi.

Pr. 5

V triede sa učí 12 predmetov, každý najviac jednu vyučovaciu hodinu denne. Urči, koľkými spôsobmi sa dá zostaviť pre túto triedu rozvrh na jeden deň, v ktorom má byť šesť vyučovacích hodín. V koľkých z nich sa vyskytuje daný predmet (napr. anglický jazyk) a v koľkých z nich je tento predmet zaradený na prvú hodinu?

$p_1 = V_6(12) = \frac{12!}{6!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 665\,280$

Vyberáme 6 predmetov z 12 predmetov a záleží na ich poradí.

$p_2 = 6 \cdot V_5(11) = 6 \cdot \frac{11!}{6!} = 6 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 332\,640$

Daný predmet môže byť zaradený na 1. až 6. hodinu a k nemu pridáme ešte ďalších 5 predmetov zo zvyšných 11.

$p_3 = V_5(11) = \frac{11!}{6!} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 55\,440$

Vyberáme len pätícu predmetov na 2. až 6. hodinu z 11 zvyšných predmetov.

Rozvrh sa dá zostaviť 665 280 spôsobmi, daný predmet je v 332 640 rozvrhoch a na 1. hodinu je zaradený v 55 440 rozvrhoch.

Pr. 6

Urči počet prvkov, z ktorých sa dá vytvoriť:

a) 240 dvojčlenných variácií,

b) dvakrát viac 4-členných variácií než 3-členných.

a) $V_2(n) = 240$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 240$$

$$n \cdot (n-1) = 240$$

$$n^2 - n - 240 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 240}}{2} \Rightarrow n_1 = 16,\ n_2 = -15$$

Využijeme vzťah $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

$n_2 = -15$ nevyhovuje, počet je prirodzené číslo.

240 dvojčlenných variácií sa dá vytvoriť zo 16 prvkov.

b) $V_4(n) = 2 \cdot V_3(n)$

$$\frac{n!}{(n-4)!} = 2\frac{n!}{(n-3)!}$$

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) = 2n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$$

$$n - 3 = 2$$

$$n = 5$$

Využijeme opäť vzťah $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Skúška: $V_4(5) = 120$, $V_3(5) = 60$, $120 = 2 \cdot 60 = 120$

Dvakrát viac 4-členných variácií než 3-členných sa dá vytvoriť z 5 prvkov.

Pr. 7

O telefónnom čísle svojho spolužiaka vedel Peter len to, že je šesťmiestne, začína sedmičkou, neobsahuje dve rovnaké číslice a je deliteľné 25. Urči, koľko telefónnych čísel prichádza do úvahy.

7 • • • 2 5

alebo

7 • • • 5 0

Na konci čísla je 25 alebo 50, ak má byť číslo deliteľné 25.
Na neobsadené tri miesta môžeme vybrať trojicu zo 7 zvyšných cifier (záleží na poradí).

$$p = 2 \cdot V_3(7) = 2 \cdot \frac{7!}{4!} = 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 420$$

Do úvahy prichádza 420 telefónnych čísel.

Pr. 8

Ak sa zväčší počet prvkov o 2, zväčší sa počet 3-členných variácií: **a)** 10-krát, **b)** o 150.
Urči pôvodný počet prvkov.

a) $V_3(n+2) = 10V_3(n)$

$$\frac{(n+2)!}{(n-1)!} = 10\frac{n!}{(n-3)!}$$

$$\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = 10\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!}$$

$$(n+2)(n+1)n = 10n(n-1)(n-2) \quad /:n$$

Môžeme deliť n, pretože počet je prirodzené číslo.

$$n^2 + 3n + 2 = 10n^2 - 30n + 20$$

$$9n^2 - 33n + 18 = 0$$

$$3n^2 - 11n + 6 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-72}}{6} = \frac{11 \pm 7}{6} \Rightarrow n_1 = 3,\ n_2 = \frac{2}{3}$$

$n_2 = \frac{2}{3}$ nevyhovuje, počet je prirodzené číslo.

Pôvodne boli 3 prvky.

Skúška: $V_3(3) = 6$, $V_3(5) = 60$, $60 = 6 \cdot 10$

b) $V_3(n+2) = V_3(n) + 150$

$$\frac{(n+2)!}{(n-1)!} = \frac{n!}{(n-3)!} + 150$$

$$\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} + 150$$

$$(n+2)(n+1)n = n(n-1)(n-2)+150$$
$$n^3+3n^2+2n = n^3-3n^2+2n+150$$
$$6n^2 = 150$$
$$n^2 = 25 \Rightarrow n_1 = 5,\ n_2 = -5$$

$n_2 = -5$ nevyhovuje, počet je prirodzené číslo.

Pôvodne bolo 5 prvkov.

Skúška: $V_3(5) = 60$, $V_3(7) = 210$, $210 = 60+150$

Príklady na permutácie bez opakovania

Pr. 9

S pripomienkami k prerokúvanému zákonu chce v parlamente vystúpiť šesť poslancov A, B, C, D, E, F.

Urči počet: **a)** všetkých možných poradí ich vystúpení,

b) všetkých poradí, v ktorých vystupuje A po E,

c) všetkých poradí, v ktorých vystupuje A ihneď po E.

a) $p = P(6) = 6! = 720$

Počet všetkých možných poradí vystúpení je 720.

b)

$$\left.\begin{array}{cccccc} E & A & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ E & \bullet & A & \bullet & \bullet & \bullet \\ E & \bullet & \bullet & A & \bullet & \bullet \\ E & \bullet & \bullet & \bullet & A & \bullet \\ E & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & A \end{array}\right\} p_1 = 5\cdot P(4)$$

$$\left.\begin{array}{cccccc} \bullet & E & A & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & E & \bullet & A & \bullet & \bullet \\ \bullet & E & \bullet & \bullet & A & \bullet \\ \bullet & E & \bullet & \bullet & \bullet & A \end{array}\right\} p_2 = 4\cdot P(4)$$

$$\left.\begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & E & A & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & E & \bullet & A & \bullet \\ \bullet & \bullet & E & \bullet & \bullet & A \end{array}\right\} p_3 = 3\cdot P(4)$$

$$\left.\begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \bullet & E & A & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & E & \bullet & A \end{array}\right\} p_4 = 2\cdot P(4)$$

$$\begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & E & A \end{array} \quad p_5 = 1\cdot P(4)$$

$$p = p_1+p_2+p_3+p_4+p_5 = 15\cdot P(4) = 15\cdot 24 = 360$$

Počet všetkých možných poradí vystúpení, v ktorých vystupuje A po E, je 360.

c) $p = P(5) = 5! = 120$

Skupinu EA považujeme za jeden prvok.

Počet všetkých možných poradí vystúpení, v ktorých vystupuje A ihneď po E, je 120.

Pr. 10

Urči počet všetkých päťciferných čísel, v ktorých dekadickom zápise je každá z číslic 0, 1, 3, 4, 7.

Urči, koľko z týchto čísel je: **a)** deliteľných 6, **b)** väčších než 70 134.

$$p = P(5) - P(4) = 120 - 24 = 96$$

Od počtu všetkých čísel vytvorených z piatich číslic $P(5)$ odpočítame počet skupín začínajúcich nulou $P(4)$.

a) $\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \overset{0}{\cdot}$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \overset{4}{\cdot}$

$\overset{0}{\cdot} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \overset{4}{\cdot}$ nesmie nastať

Podmienkou deliteľnosti číslom 6 je deliteľnosť číslami 2 a 3. Každé z týchto päťciferných čísel je deliteľné 3, pretože súčet všetkých použitých cifier $(0+1+3+4+7=15)$ je deliteľný 3. Ak má byť číslo deliteľné aj 2, musí končiť 0 alebo 4 (nesmie však začínať 0).

$$p = P(4) + P(4) - P(3) = 2P(4) - P(3) = 2 \cdot 24 - 6 = 42$$

b) $\left.\begin{matrix} 70\,143 \\ 70\,314 \\ 70\,341 \\ 70\,413 \\ 70\,431 \end{matrix}\right\} 5$ ďalej $\left.\begin{matrix} 71 \ldots \\ 73 \ldots \\ 74 \ldots \end{matrix}\right\} 3 \cdot P(3)$

$$p = 5 + 3P(3) = 5 + 3 \cdot 6 = 23$$

Počet všetkých päťciferných čísel vytvorených z číslic 0, 1, 3, 4, 7 je 96, z toho deliteľných 6 je 42 a väčších než 70 134 je 23.

Pr. 11

Urči, koľkými spôsobmi sa môže do šesťmiestnej lavice posadiť 6 chlapcov, ak:

a) dvaja chcú sedieť vedľa seba,

b) dvaja chcú sedieť vedľa seba a tretí na kraji.

a) $\underset{\cdot}{A} \; \underset{\cdot}{B} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$

$\underset{\cdot}{B} \; \underset{\cdot}{A} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$

Dvojicu pokladáme za jeden prvok. Sedieť môže A vedľa B alebo B vedľa A.

$$p = 2 \cdot P(5) = 2 \cdot 120 = 240$$

Chlapci sa môžu posadiť 240 spôsobmi.

b) $\underset{\cdot}{A} \; \underset{\cdot}{B} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \underset{\cdot}{C}$

$\underset{\cdot}{B} \; \underset{\cdot}{A} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \underset{\cdot}{C}$

$p_1 = 2 \cdot P(4)$

$\underset{\cdot}{C} \quad \underset{\cdot}{A} \; \underset{\cdot}{B} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$

$\underset{\cdot}{C} \quad \underset{\cdot}{B} \; \underset{\cdot}{A} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$

$p_2 = 2 \cdot P(4)$

$$p = 4 \cdot P(4) = 96$$

Chlapci sa môžu posadiť 96 spôsobmi.

Pr. 12

Urči počet prvkov tak, aby:

a) z nich bolo možné vytvoriť práve 40 320 permutácií,

b) zväčšením ich počtu o 2 sa počet permutácií zväčšil 56-krát,

c) zmenšením ich počtu o 2 sa počet permutácií zmenšil 20-krát.

a) $P(n) = 40\,320$

$n! = 40\,320 \Rightarrow n = 8$

Prvkov je 8.

b) $P(n+2)=56P(n)$

$(n+2)!=56n!$

$(n+2)(n+1)=56$

$n^2+3n-54=0$

$(n-6)(n+9)=0 \Rightarrow n_1=6,\ n_2=-9$ — $n_2=-9$ nevyhovuje, počet je prirodzené číslo väčšie alebo rovné 2.

Prvkov je 6.

c) $20\cdot P(n-2)=P(n)$

$20\cdot(n-2)!=n!$

$20=n\cdot(n-1)$

$0=n^2-n-20$

$0=(n-5)(n+4) \Rightarrow n_1=5,\ n_2=-4$ — $n_2=-4$ nevyhovuje, počet je prirodzené číslo väčšie alebo rovné 2.

Prvkov je 5.

Príklady na kombinácie bez opakovania

Pr. 13

Urči, koľkými spôsobmi je možné na šachovnici (8×8 polí) vybrať:

a) trojicu polí, **b)** trojicu polí neležiacich v jednom stĺpci,

c) trojicu polí neležiacich ani v jednom stĺpci a ani v jednom riadku, **d)** trojicu polí nerovnakej farby.

a) $p=C_3(64)=\binom{64}{3}=\dfrac{64!}{3!\cdot 61!}=\dfrac{64\cdot 63\cdot 62}{3\cdot 2}=41\,664$ — Vyberáme 3 políčka zo 64, nezáleží na poradí.

Trojica polí sa dá vybrať 41 664 spôsobmi.

b) $p=C_3(64)-8\cdot C_3(8)=\binom{64}{3}-8\cdot\dfrac{8!}{3!\cdot 5!}=41\,216$ — Od počtu všetkých trojíc odpočítame tie, ktoré ležia v jednom stĺpci.

Trojica polí neležiacich v jednom stĺpci sa dá vybrať 41 216 spôsobmi.

c) $2\cdot 8\cdot\binom{8}{3}$ — Určíme počet trojíc polí, ktoré ležia v jednom riadku alebo v jednom stĺpci.

$p=\binom{64}{3}-16\binom{8}{3}=40\,768$ — Od počtu všetkých trojíc odpočítame tie, ktoré ležia v jednom stĺpci alebo v jednom riadku.

Trojica polí neležiacich v jednom stĺpci alebo v jednom riadku sa dá vybrať 40 768 spôsobmi.

d) $\binom{32}{2}\cdot\binom{32}{1}$ — Určíme počet trojíc polí, z ktorých je jedno biele a dve čierne. Počet trojíc, ktoré majú dve polia biele a jedno čierne, je rovnaký.

$p=2\cdot\binom{32}{2}\cdot\binom{32}{1}=64\cdot\binom{32}{2}=31\,744$

Trojica polí nerovnakej farby sa dá vybrať 31 744 spôsobmi.

Pr. 14

Urči, koľkými spôsobmi je možné zo 7 mužov a 4 žien vybrať šesťčlennú skupinu, v ktorej sú:

a) práve dve ženy, **b)** aspoň dve ženy.

a) $p=\binom{4}{2}\cdot\binom{7}{4}=\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\dfrac{7!}{4!\cdot 3!}=210$ — Ku dvom ženám vyberieme 4 mužov zo siedmich.

Skupina s dvoma ženami sa dá vybrať 210 spôsobmi.

b) $p=\binom{4}{2}\cdot\binom{7}{4}+\binom{4}{3}\cdot\binom{7}{3}+\binom{4}{4}\cdot\binom{7}{2}=371$ — Aspoň dve ženy znamená: buď práve dve alebo práve tri alebo práve štyri ženy.

Skupina s najmenej dvoma ženami sa dá vybrať 371 spôsobmi.

Pr. 15

V rovine je daných 10 rôznych bodov, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke.

a) Najviac koľko rôznych kružníc určujú?

b) Koľko rôznych kružníc určujú, ak práve 6 bodov leží na jednej kružnici?

a) $p = C_3(10) = \binom{10}{3} = 120$ — Tromi rôznymi bodmi neležiacimi na jednej priamke je určená jediná kružnica.

10 bodov určuje najviac 120 kružníc.

b) $C_3(4)$ — Počet kružníc, ktoré vytvoríme zo zvyšných 4 bodov.

$6 \cdot C_2(4)$ — Počet kružníc určených tak, že každému zo 6 bodov na kružnici priradíme 2 body zo zvyšných 4 bodov.

$4 \cdot C_2(6)$ — Počet kružníc určených tak, že každému zo 4 zvyšných bodov priradíme 2 body zo 6 bodov ležiacich na kružnici.

$p = C_3(4) + 6C_2(4) + 4C_2(6) + 1 = 4 + 36 + 60 + 1 = 101$

10 bodov (vzhľadom na dané podmienky) určuje najviac 101 kružníc.

Pr. 16

Urči, koľko priamok je určených 6 rôznymi bodmi, ak:

a) žiadne tri z nich neležia na jednej priamke, **b)** tri body ležia na jednej priamke,

c) tri a tri body ležia na jednej priamke, **d)** štyri body ležia na jednej priamke.

a) $p = C_2(6) = 15$ — Priamka je určená dvoma rôznymi bodmi.

Šiestimi rôznymi bodmi je určených 15 priamok.

b) $C_2(6)$ — Počet všetkých priamok určených 6 bodmi.

$C_2(3)$ — Počet priamok, ktoré by určili 3 body.

1 — Počet priamok určených tromi bodmi ležiacimi na jednej priamke.

$p = C_2(6) - C_2(3) + 1 = 15 - 3 + 1 = 13$

Šiestimi rôznymi bodmi, z ktorých tri ležia na jednej priamke, je určených 13 priamok.

c) $C_2(6)$ — Počet všetkých priamok určených 6 bodmi.

$2 \cdot C_2(3)$ — Počet priamok, ktoré by určili 3 body a 3 body.

2 — Počet priamok určených tromi a tromi bodmi ležiacimi na jednej priamke.

$p = C_2(6) - 2C_2(3) + 2 = 15 - 6 + 2 = 11$

Šiestimi rôznymi bodmi, z ktorých tri a tri ležia na jednej priamke, je určených 11 priamok.

d) $C_2(6)$ — Počet všetkých priamok určených 6 bodmi.

$C_2(4)$ — Počet priamok, ktoré by určili 4 body.

1 — Počet priamok určených štyrmi bodmi ležiacimi na jednej priamke.

$p = C_2(6) - C_2(4) + 1 = 15 - 6 + 1 = 10$

Šiestimi rôznymi bodmi, z ktorých štyri ležia na jednej priamke, je určených 10 priamok.

Pr. 17

Hokejové mužstvo má 20 hráčov: 13 útočníkov, 5 obrancov a 2 brankárov. Urči, koľko rôznych zostáv by mohol tréner vytvoriť, ak v jednej zostave sú 3 útočníci, 2 obrancovia a 1 brankár.

$p = C_3(13) \cdot C_2(5) \cdot C_1(2) = 5\,720$ — Vyberáme 3 útočníkov z 13, 2 obrancov z 5, 1 brankára z 2.

Tréner by mohol vytvoriť 5 720 zostáv.

Zmiešané úlohy

Pr. 18

Urči, koľkými spôsobmi možno zoradiť na štartovej čiare osem závodných automobilov do dvoch radov po štyroch vozoch, ak: **a)** v každom rade záleží na poradí, **b)** na poradí v radoch nezáleží.

a) $p=\binom{8}{4}\cdot P(4)\cdot P(4)=\frac{8!}{4!\cdot 4!}\cdot 4!\cdot 4!=8!=40\,320$

Autá možno zoradiť 40 320 spôsobmi.

Vyberieme štvoricu do prvého radu, určíme v nej poradie. Druhá štvorica je už vybraná, no musíme v nej určiť poradie.

b) $p=\binom{8}{4}=\frac{8!}{4!\cdot 4!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2}=70$

Autá možno zoradiť 70 spôsobmi.

Vyberieme štvoricu do prvého radu, na poradí nezáleží. Automaticky je určený aj druhý rad, v ktorom tiež na poradí nezáleží.

Pr. 19

Urči, koľkými spôsobmi sa dajú „premiestniť" písmená slová *OHRADENÝ* tak, aby daná skupina po sebe idúcich písmen utvorila: **a)** slovo *RODNÝ*,
b) slová *NERO*, *DÝHA* v ľubovoľnom poradí,
c) slová *ONA*, *HRDÝ* v ľubovoľnom poradí.

a) $p=P(4)=4!=24$

Písmená slova možno premiestniť 24 spôsobmi.

Slovo *RODNÝ* chápeme ako jeden prvok, ktorý permutujeme so zvyšnými 3 písmenami – *A*, *E*, *H*.

b) $p=P(2)=2!=2$

Písmená slova sa dajú premiestniť len dvoma spôsobmi.

Môžeme vymieňať iba 2 prvky a to slová *NERO* a *DÝHA*, pretože na obe slová sme vyčerpali všetkých 8 možných písmen slova *OHRADENÝ*.

c) $p=P(3)=3!=6$

Písmená slova sa dajú premiestniť šiestimi spôsobmi.

Z písmen slova *OHRADENÝ* ostáva písmeno *E*. Permutujeme teda 3 prvky (slová *ONA*, *HRDÝ* a písmeno *E*) *napr. takto:*

ONA *E* *HRDÝ*

Pr. 20

Na maturitnom večierku je 15 chlapcov a 12 dievčat.
Urči, koľkými spôsobmi sa z nich dajú vybrať 4 tanečné páry.

$p=C_4(15)\cdot V_4(12)=\frac{15!}{4!\cdot 11!}\cdot\frac{12!}{8!}=16\,216\,200$

Vyberáme ľubovoľnú štvoricu chlapcov, v ktorej nezáleží na poradí, k nim priraďujeme ľubovoľnú štvoricu dievčat, v ktorej záleží na poradí.
Alebo môžeme postupovať obrátene:

$p=C_4(12)\cdot V_4(15)=\frac{12!}{4!\cdot 8!}\cdot\frac{15!}{11!}$

Štyri tanečné páry sa dajú vybrať 16 216 200 spôsobmi.

V oboch prípadoch dostávame rovnaké číslo.

Pr. 21

Urči, koľkými spôsobmi možno okolo okrúhleho stola posadiť 5 mužov a 5 žien tak, aby žiadne dve ženy nesedeli vedľa seba.

$p=2\cdot P(5)\cdot P(5)=2\cdot 5!\cdot 5!=28\,800$

Mužov a ženy môžeme posadiť okolo okrúhleho stola 28 800 spôsobmi.

Ak očíslujeme miesta okolo stola 1 až 10, tak muži môžu sedieť buď na miestach 1, 3, 5, 7, 9 alebo 2, 4, 6, 8, 10. Môže to byť ktorýkoľvek z mužov, medzi nimi môže sedieť ktorákoľvek žena.

Pr. 22

Urči počet všetkých prirodzených čísel menších než 500, ktoré sú zapísané ciframi 3, 5, 7, 9, pričom každá cifra môže byť v zápise daného čísla najviac raz.

$V_1(4)=4$ Počet jednociferných čísel.

$V_2(4)=12$ Počet dvojciferných čísel.

$V_2(3) = 6$ Počet trojciferných čísel začínajúcich 3.

$p = V_1(4) + V_2(4) + V_2(3) = 4 + 12 + 6 = 22$

Hľadaných čísel je 22.

Pr. 23

Urči počet všetkých štvorciferných prirodzených čísel utvorených len z číslic 0, 1, 2, 3, 5, 7 s rôznymi číslicami. **a)** Koľko týchto čísel končí 1? **b)** Koľko týchto čísel je nepárnych?

$p = V_4(6) - V_3(5) = 300$ Počet štvorciferných čísel.

a) $V_3(5)$ Počet čísel končiacich 1 (_ _ _ 1).

$V_2(4)$ Počet skupín končiacich 1 a začínajúcich 0, ktoré neprichádzajú do úvahy (0 _ _ 1).

$p = V_3(5) - V_2(4) = 48$

b) $4 \cdot V_3(5)$ Počet čísel končiacich1, 3, 5, 7.

$4 \cdot V_2(4)$ Počet skupín končiacich 1, 3, 5, 7 a začínajúcich 0, ktoré neprichádzajú do úvahy.

$p = 4 \cdot V_3(5) - 4 \cdot V_2(4) = 192$

Hľadaných štvorciferných čísel je 300, z nich 48 končí jednotkou a 192 je nepárnych.

Variácie s opakovaním

k-ČLENNÁ VARIÁCIA S OPAKOVANÍM Z *n* PRVKOV je usporiadaná *k*-tica zostavená z týchto prvkov tak, že každý sa v nej vyskytuje najviac *k*-krát. Počet všetkých *k*-členných variácií s opakovaním z *n* prvkov označujeme $V'_k(n)$, pričom $V'_k(n) = n^k$.

Permutácie s opakovaním

k-ČLENNÁ PERMUTÁCIA S OPAKOVANÍM Z *n* PRVKOV je usporiadaná *k*-tica zostavená z týchto prvkov tak, že každý sa v nej vyskytuje aspoň raz. Počet všetkých permutácií s opakovaním z *n* prvkov, v ktorých sa jednotlivé prvky opakujú k_1-krát, k_2-krát..., k_n-krát, označujeme $P'(k_1, k_2 \dots k_n)$, pričom $P'(k_1, k_2 \dots k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$.

Kombinácie s opakovaním

k-ČLENNÁ KOMBINÁCIA S OPAKOVÁNÍM Z *n* PRVKOV je neusporiadaná *k*-tica zostavená z týchto prvkov tak, že každý sa v nej vyskytuje najviac *k*-krát. Počet všetkých *k*-členných kombinácií s opakovaním z *n* prvkov označujeme $C'_k(n)$, pričom $C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$.

Riešené príklady na variácie, permutácie a kombinácie s opakovaním

Pri riešení praktických úloh opäť využijeme predchádzajúce vzťahy. Zásadný rozdiel medzi týmto druhom príkladov a predchádzajúcimi príkladmi je v tom, že teraz budeme daný prvok vyberať aj viackrát (práve preto ide o výbery s opakovaním).

Príklady na variáce s opakovaním

Pr. 24

Urči, koľko písmen má Morseova abeceda, ktorá používa symboly bodku a čiarku v jedno-, dvoj-, troj- alebo štvormiestnych skupinách, pričom každý symbol sa môže až štyrikrát opakovať.

$V_1'(2) = 2^1 = 2$ Počet skupín s jedným symbolom.
$V_2'(2) = 2^2 = 4$ Počet skupín s dvoma symbolmi.
$V_3'(2) = 2^3 = 8$ Počet skupín s tromi symbolmi.
$V_4'(2) = 2^4 = 16$ Počet skupín so štyrmi symbolmi.
$p = V_1'(2) + V_2'(2) + V_3'(2) + V_4'(2) = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$

Morseova abeceda má 30 písmen.

Pr. 25

Štátnu poznávaciu značku v istom štáte tvoria tri písmená (z 28 možných) a štyri číslice. Urči, koľko poznávacích značiek je v tomto štáte k dispozícii.

$p = V_3'(28) \cdot V_4'(10) = 28^3 \cdot 10^4 = 219\,520\,000$

V štáte je k dispozícii 219 520 000 značiek.

Pr. 26

Urči počet štvorciferných čísel deliteľných štyrmi, v ktorých sa vyskytujú len cifry 1, 2, 3, 4, 5.

$\_\,\_\,\underline{1}\,\underline{2}$ $\_\,\_\,\underline{2}\,\underline{4}$ $\_\,\_\,\underline{3}\,\underline{2}$ $\_\,\_\,\underline{4}\,\underline{4}$ $\_\,\_\,\underline{5}\,\underline{2}$ Tvar hľadaných čísel.
$p = 5 \cdot V_2'(5) = 5 \cdot 5^2 = 125$ Číslo je deliteľné štyrmi, ak jeho posledné dvojčíslie je deliteľné 4.

Hľadaných štvorciferných čísel je 125.

Pr. 27

Urči počet všetkých prirodzených čísel menších než 1 000 000, ktoré obsahujú len číslice 5 a 8.

$V_1'(2) = 2^1 = 2$ Počet jednociferných čísel.
$V_2'(2) = 2^2 = 4$ Počet dvojciferných čísel.
$V_3'(2) = 2^3 = 8$ Počet trojciferných čísel.
$V_4'(2) = 2^4 = 16$ Počet štvorciferných čísel.
$V_5'(2) = 2^5 = 32$ Počet päťciferných čísel.
$V_6'(2) = 2^6 = 64$ Počet šesťciferných čísel.
$p = 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 = 126$

Hľadaných čísel je 126.

Pr. 28

Meno a priezvisko každého človeka bývajúceho v mestečku s 1 500 obyvateľmi začína jedným z 32 písmen. Dokáž, že aspoň dvaja obyvatelia mestečka majú rovnaký monogram.

$p = V_2'(32) = 32^2 = 1\,024$ Monogram tvoria 2 písmená z 32.

Monogramov je 1 024, teda len toľko obyvateľov mestečka môže mať rôzne monogramy. Zvyšných 476 obyvateľov má teda rovnaký monogram ako niektorý z 1 024 obyvateľov mestečka.

Pr. 29

Kufrík má zámok na heslo, ktorý sa otvorí len vtedy, ak na každom z piatich kotúčov nastavíme správnu číslicu. Na každom kotúči je 9 číslic. Urči najväčší možný počet pokusov, ktoré musíme vykonať, ak chceme kufrík otvoriť, keď sme zabudli heslo.

$V_5'(9) = 9^5 = 59\,049$ Vyberáme usporiadanú pätícu z deviatich číslic, ktoré sa môžu opakovať.

Najväčší možný počet pokusov je 59 049.

Pr. 30

Urči počet všetkých šesťciferných prirodzených čísel, ktorých ciferný súčet je párne číslo.

$p = 9 \cdot V_4'(10) \cdot 5 = 450\,000$

Prvú číslicu môžeme vybrať 9 spôsobmi (1, 2 ..., 9), na ďalších štyroch miestach môže byť ľubovoľná číslica (záleží na poradí, štvorica s opakovaním z 10 cifier) a posledná cifra je buď párna, alebo nepárna.

Všetkých hľadaných čísel je 450 000.

Príklady na permutácie s opakovaním

Pr. 31

Urči počet všetkých jedenásťhláskových slov, ktoré sa dajú vytvoriť zo slova *ABRAKADABRA* zmenou poradia jeho písmen. Urči, koľko z nich je takých, že žiadna: **a)** dvojica susedných písmen nie je tvorená dvoma písmenami *A*, **b)** pätica susedných písmen nie je tvorená piatimi písmenami *A*.

$p = \dfrac{11!}{5!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 83\,160$

Počet spôsobov usporiadania písmen slova *ABRAKADABRA*.

a) □ *B* □ *R* □ *K* □ *D* □ *B* □ *R* □

Ak nemajú byť dve písmená *A* vedľa seba, musia byť len na miestach, ktoré nie sú obsadené.

$\dbinom{7}{5}$

Počet spôsobov, ktorými možno vybrať 5 neobsadených miest.

$P'(2,2,1,1) = \dfrac{6!}{2!\cdot 2!}$

Počet spôsobov, ktorými možno premiestniť zvyšné písmená.

$p = \dbinom{7}{5}\cdot\dfrac{6!}{2!\cdot 2!} = 3\,780$

Slov, v ktorých nie sú žiadne dve *A* vedľa seba, je 3 780.

b)

Päticu písmen *A* budeme považovať za jeden znak.

$\dfrac{7!}{2!\cdot 2!}$

Počet spôsobov, ktorými možno premiestniť písmená *B, B, R, R, K, D*.

$p = P'(5,2,2,1,1) - P'(2,2,1,1) = \dfrac{11!}{5!\cdot 2!\cdot 2!} - \dfrac{7!}{2!\cdot 2!} = 81\,900$

Slov, v ktorých nie je päť písmen *A* vedľa seba, je 81 900.

Pr. 32

Urči počet všetkých prirodzených štvorciferných čísel deliteľných deviatimi, v ktorých dekadickom zápise sú len číslice 0, 1, 2, 5, 7.

Ciferný súčet čísel deliteľných deviatimi musí byť deliteľný deviatimi, preto prichádzajú do úvahy len ciferné súčty 27, 18 a 9. Najväčší možný ciferný súčet je totiž 28 (7 + 7 + 7 + 7). Z daných čísel sa ciferný súčet 27 nedá zostaviť. Do úvahy prichádza len ciferný súčet 18 (7 + 7 + 2 + 2 alebo 7 + 5 + 5 + 1) a ciferný súčet 9 (7 + 2 + 0 + 0 alebo 7 + 1 + 1 + 0, alebo 5 + 2 + 2 + 0, alebo 5 + 2 + 1 + 1).

$p_1 = \dfrac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$

Počet čísel z číslic 7, 7, 2, 2.

$p_2 = \dfrac{4!}{2!} = 12$

Počet čísel z číslic 7, 5, 5, 1.

$p_3 = \dfrac{4!}{2!} - 3! = 6$

Počet čísel z číslic z 7, 2, 0, 0 (na začiatku nesmie byť jedna alebo dve nuly).

$p_4 = \frac{4!}{2!} - \frac{3!}{2!} = 9$ Počet čísel z číslic 7, 1, 1, 0 (na začiatku nesmie byť nula).

$p_5 = \frac{4!}{2!} - \frac{3!}{2!} = 9$ Počet čísel z číslic 5, 2, 2, 0 (na začiatku nesmie byť nula).

$p_6 = \frac{4!}{2!} = 12$ Počet čísel z číslic z 5, 2, 1, 1.

$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 6 + 12 + 6 + 9 + 9 + 12 = 54$

Hľadaných štvorciferných čísel je 54.

Pr. 33

Urči počet spôsobov, ktorými možno umiestniť všetky biele šachové figúrky (kráľ, dáma, 2 veže, 2 kone, 2 strelci, 8 pešiakov):

a) na dva pevne zvolené rady šachovnice (8×8 polí), **b)** na ľubovoľné dva rady šachovnice.

a) $p = P'(8, 2, 2, 2, 1, 1) = \frac{16!}{8! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 64\ 864\ 800$ Dva pevne zvolené rady majú 16 polí.

b) $\binom{8}{2}$ Počet spôsobov, ktorými možno vybrať dva rady.

Na 16 polí týchto vybraných radov máme umiestniť 16 figúr.

$p = \binom{8}{2} \cdot P'(8, 2, 2, 2, 1, 1) = 1\ 816\ 214\ 400$

Biele figúrky možno na dva pevne zvolené rady umiestniť 64 864 800 spôsobmi a na dva ľubovoľné rady 1 816 214 400 spôsobmi.

Pr. 34

Urči počet všetkých päťciferných prirodzených čísel, ktoré sa dajú zostaviť z cifier 5 a 7, ak v každom z nich má byť cifra 5: **a)** práve trikrát, **b)** najviac trikrát, **c)** aspoň trikrát.

a) $p = P'(3, 2) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ Počet päťciferných čísel z cifier 5, 5, 5, 7, 7.

b) $p_1 = P'(0, 5) = \frac{5!}{5!} = 1$ Počet päťciferných čísel z cifier 7, 7, 7, 7, 7.

$p_2 = P'(1, 4) = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = 5$ Počet päťciferných čísel z cifier 5, 7, 7, 7, 7.

$p_3 = P'(2, 3) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ Počet päťciferných čísel z cifier 5, 5, 7, 7, 7.

$p_4 = P'(3, 2) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ Počet päťciferných čísel z cifier 5, 5, 5, 7, 7.

$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 26$

c) $p_1 = P'(3, 2) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ Počet päťciferných čísel z cifier 5, 5, 5, 7, 7.

$p_2 = P'(4, 1) = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5$ Počet päťciferných čísel z cifier 5, 5, 5, 5, 7, 7.

$p_3 = P'(5, 0) = \frac{5!}{5! \cdot 0!} = 1$ Počet päťciferných čísel z cifier 5, 5, 5, 5, 5.

$p = p_1 + p_2 + p_3 = 16$

Číslica 5 je trikrát v 10 číslach.

Číslica 5 je najviac trikrát v 26 číslach.

Číslica 5 je aspoň trikrát v 16 číslach.

Pr. 35

a) Urči počet všetkých desaťciferných prirodzených čísel s ciferným súčtom 3.
b) Urči, koľko z nich je párnych.

a)

Desaťciferné čísla majú ciferný súčet tri len vtedy, keď okrem núl obsahujú len 3 jednotky alebo 1 dvojku a 1 jednotku, alebo len 1 trojku. Nesmú však začínať nulou.

$p_1 = P'(2,7) = \frac{9!}{2!\cdot 7!} = 36$ 1 _ _ _ _ _ _ _ _ _

Počet čísel majúcich na prvom mieste jednotku a na zvyšných deviatich 2 jednotky a 7 núl.

$p_2 = P'(1,8) = \frac{9!}{8!\cdot 1!} = 9$ 1 _ _ _ _ _ _ _ _ _

Počet čísel majúcich na prvom mieste jednotku a na zvyšných deviatich 1 dvojku a 8 núl.

$p_3 = P'(1,8) = \frac{9!}{8!\cdot 1!} = 9$ 2 _ _ _ _ _ _ _ _ _

Počet čísel majúcich na prvom mieste dvojku a na zvyšných deviatich 1 jednotku a 8 núl.

$p_4 = P'(9) = \frac{9!}{9!} = 1$ 3 _ _ _ _ _ _ _ _ _

Počet čísel majúcich na prvom mieste trojku a na zvyšných deviatich len nuly.

$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 36 + 9 + 9 + 1 = 55$

b) $p_1 = P'(2,6) = \frac{8!}{2!\cdot 6!} = 28$ 1 _ _ _ _ _ _ _ _ 0

Počet čísel majúcich na prvom mieste jednotku, na poslednom nulu a na zvyšných ôsmich 2 jednotky a 6 núl.

$p_2 = P'(1,7) = \frac{8!}{7!\cdot 1!} = 8$ 1 _ _ _ _ _ _ _ _ 0

Počet čísel majúcich na prvom mieste jednotku, na poslednom nulu a na zvyšných ôsmich 1 dvojku a 7 núl.

$p_3 = P'(8) = \frac{8!}{8!} = 1$ 1 _ _ _ _ _ _ _ _ 2

Počet čísel majúcich na prvom mieste jednotku, na poslednom dvojku a na zvyšných ôsmich len nuly.

$p_4 = P'(1,7) = \frac{8!}{7!\cdot 1!} = 8$ 2 _ _ _ _ _ _ _ _ 0

Počet čísel majúcich na prvom mieste dvojku, na poslednom nulu a na zvyšných ôsmich 1 jednotku a 7 núl.

$p_5 = P'(8) = \frac{8!}{8!} = 1$ 3 _ _ _ _ _ _ _ _ 0

Počet čísel majúcich na prvom mieste trojku, na poslednom nulu a na zvyšných ôsmich len nuly.

$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 46$

Hľadaných desaťciferných čísel je 55, z nich je 46 párnych.

Pr. 36

Koľko štvorciferných prirodzených čísel sa dá zostaviť z číslic čísla 238 832? V hľadaných číslach sa každá číslica môže vyskytovať najviac toľkokrát, koľkokrát sa vyskytuje v čísle 238 832.

V čísle 238 832 sú 2 dvojky, 2 trojky, 2 osmičky.

$p_1 = 3\cdot P'(2,2) = 3\cdot 6 = 18$

Počet čísel vytvorených z číslic 2, 2, 3, 3 alebo 2, 2, 8, 8, alebo 3, 3, 8, 8.

$p_2 = 3\cdot P'(1,1,2) = 3\cdot 12 = 36$

Počet čísel vytvorených z číslic 2, 3, 8, 8 alebo 2, 3, 3, 8, alebo 2, 2, 3, 8.

$p = p_1 + p_2 = 54$

Hľadaných štvorciferných čísel je 54.

Pr. 37

Urči, koľkými spôsobmi možno premiestniť písmená slova *BATERKA* tak, aby sa samohlásky a spoluhlásky striedali.

$P(4)$ — Spoluhlások je viac, musia byť preto na kraji. V slove sú 4 spoluhlásky, skupina písmen teda môže začínať písmenami B, T, R alebo K. Počet usporiadaní spoluhlások, napr. $T\_R\_K\_B$.

$P'(2,1)$ — Počet usporiadaní samohlások ($\_A\_A\_E\_, \_A\_E\_A\_, \_E\_A\_A\_$).

$p = P(4) \cdot P'(2,1) = 72$

Písmená možno premiestniť 72 spôsobmi.

Pr. 38

Zo siedmych guliek, z ktorých sú štyri modré M (nerozlíšiteľné), jedna biela B, jedna červená C a jedna zelená Z, máme vybrať a položiť vedľa seba do radu 5 guliek. Urči, koľkými spôsobmi to možno urobiť.

$$\left.\begin{matrix} M+M+M+M+B \\ M+M+M+M+C \\ M+M+M+M+Z \end{matrix}\right\} \quad p_1 = 3 \cdot P'(1,4) = 3 \cdot \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 15$$

Záleží na poradí vytiahnutia jednotlivých guliek.

$$\left.\begin{matrix} M+M+M+C+B \\ M+M+M+C+Z \\ M+M+M+B+Z \end{matrix}\right\} \quad p_2 = 3 \cdot P'(1,1,3) = 3 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 1! \cdot 1!} = 60$$

$$M+M+B+C+Z \quad p_3 = P'(2,1,1,1) = \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 60$$

$p = p_1 + p_2 + p_3 = 135$

Guľky možno vybrať 135 spôsobmi.

Príklady na kombinácie s opakovaním

Pr. 39

Vo vrecku sú červené, modré a zelené guľky. Guľky rovnakej farby sú nerozlíšiteľné.
Urči, koľkými spôsobmi možno vybrať 5 guliek, ak vo vrecku je:

a) aspoň 5 guliek každej farby, **b)** 5 červených, 4 modré a 4 zelené.

V pätici guliek, ktoré vyberáme, nezáleží na poradí a farby sa v nej môžu opakovať. Ide teda o 5-členné kombinácie s opakovaním z troch prvkov.

a) $C'_5(3) = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$

Guliek každej farby je dostatočné množstvo, je možné vytvoriť všetky pätice.

Päť guliek možno vybrať 21 spôsobmi.

b) $C'_5(3) - 2 = 19$

Je nemožné vybrať päť modrých alebo päť zelených guliek.

Päť guliek možno vybrať 19 spôsobmi.

Pr. 40

Urči počet kvádrov, ktorých dĺžky hrán sú prirodzené čísla menšie než jedenásť.
Urči, koľko z nich je kociek.

$$C'_3(10) = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2} = 220$$

$$C'_1(10) = \binom{10}{1} = \frac{10!}{1! \cdot 9!} = 10$$

Kvádrov je 220, kociek je 10.

Pr. 41
Urči počet všetkých trojuholníkov, z ktorých žiadne dva nie sú zhodné a ktorých každá strana má dĺžku vyjadrenú jedným z čísel 4, 5, 6, 7.

$$C_3'(4)=\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!\cdot 3!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2}=20$$

Hľadaných trojuholníkov je 20.

Pr. 42
Urči počet všetkých trojuholníkov, z ktorých žiadne dva nie sú zhodné a ktorých každá strana má dĺžku vyjadrenú jedným z čísel 4, 5, 6, 7, 8, 9.

$$C_3'(6)-3=\binom{8}{3}-3=\frac{8!}{3!\cdot 5!}-3=53$$

Musíme odobrať tie trojice, ktoré nespĺňajú trojuholníkovú nerovnosť, čiže (4, 5, 9), (4, 4, 8), (4, 4, 9).

Hľadaných trojuholníkov je 53.

Pr. 43
V sade 32 kariet je každá z hodnôt kariet - sedmička, osmička, deviatka, desiatka, dolník, horník, kráľ, eso - štyrikrát. Karty rovnakej hodnoty sa líšia „farbou" - červeň, zeleň, guľa, žaluď.
Urči, koľkými spôsobmi možno vybrať štyri karty, ak je dôležitá:
a) len farba jednotlivých kariet, **b)** len hodnota jednotlivých kariet.

a) $C_4'(4)=\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!\cdot 3!}=35$ Vyberáme štvoricu zo štyroch farieb.

b) $C_4'(8)=\binom{11}{4}=\frac{11!}{4!\cdot 7!}=330$ Vyberáme štvoricu z ôsmich druhov kariet.

Štyri karty možno vybrať 35 spôsobmi, ak rozlišujeme len farby kariet, a 330 spôsobmi, ak rozlišujeme len druhy kariet.

Pr. 44
Úlohu „*Zostroj kružnicu, ktorá ma tri z nasledujúcich vlastností - prechádza daným bodom, dotýka sa danej priamky, dotýka sa danej kružnice - pričom tieto vlastnosti sa môžu opakovať*", nazývame Apollóniova úloha. Urči počet Apollóniových úloh.

$$C_3'(3)=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{5\cdot 4}{2}=10$$

Vyberáme 3 vlastnosti z 3, ktoré sa môžu opakovať.

Apollóniových úloh je 10.

Binomická veta

BINOMICKÁ VETA: Pre všetky $a, b \in \mathrm{R}$ a $n \in \mathrm{N}$ platí: $(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n}b^n$,

$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot a^{n-i}b^i$ Tento zápis nazývame **ROZVOJOM VÝRAZU** $(a+b)^n$.

Pr. 45
Vypočítaj $(x^2+y)^5$.

$$(x^2+y)^5=\binom{5}{0}(x^2)^5+\binom{5}{1}(x^2)^4y+\binom{5}{2}(x^2)^3y^2+\binom{5}{3}(x^2)^2y^3+\binom{5}{4}x^2y^4+\binom{5}{5}y^5=$$
$$=x^{10}+5x^8y+10x^6y^2+10x^4y^3+5x^2y^4+y^5$$

Pr. 46

Vypočítaj $(1{,}01)^6$.

$$(1{,}01)^6 = (1+0{,}01)^6 = \binom{6}{0}\cdot 1^6 \cdot 0{,}01^0 + \binom{6}{1}\cdot 1^5 \cdot 0{,}01^1 + \binom{6}{2}\cdot 1^4 \cdot 0{,}01^2 + \binom{6}{3}\cdot 1^3 \cdot 0{,}01^3 +$$

$$+\binom{6}{4}\cdot 1^2 \cdot 0{,}01^4 + \binom{6}{5}\cdot 1^1 \cdot 0{,}01^5 + \binom{6}{6}\cdot 1^0 \cdot 0{,}01^6 = 1 + 6\cdot 10^{-2} + 15\cdot 10^{-4} + 20\cdot 10^{-6} + 15\cdot 10^{-8} +$$

$$+6\cdot 10^{-10} + 10^{-12} = 1{,}061\,520\,150\,601$$

VZOREC PRE k-TÝ ČLEN rozvoja výrazu $(a+b)^n$: $A_k = \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} \cdot b^{k-1}$

Pr. 47

Urči 10. člen rozvoja výrazu $\left(5x^3 - \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{12}$.

$$A_{10} = \binom{12}{9}(5x^3)^3\left(-\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^9 = -44\cdot 10^4 \cdot \sqrt{2}$$

Pr. 48

Ktorý člen rozvoja výrazu $\left(\frac{7}{\sqrt[4]{x}} - x\right)^{10}$ neobsahuje x?

$$A_k = \binom{10}{k-1}\left(7x^{-\frac{1}{4}}\right)^{11-k}(-x)^{k-1} = \binom{10}{k-1}7^{11-k}\cdot x^{\frac{-11+k}{4}}\cdot(-1)^{k-1}\cdot x^{k-1} =$$

$$= \binom{10}{k-1}\cdot 7^{11-k}\cdot(-1)^{k-1}\cdot x^{\frac{-11+k+4k-4}{4}} = K\cdot x^{\frac{-15+5k}{4}}$$

K je konštanta, ktorá neovplyvňuje naše riešenie.

$$x^{\frac{-15+5k}{4}} = x^0 \Leftrightarrow -15+5k = 0$$

$$k = 3$$

Exponent musí byť 0, ak nemá člen A_k obsahovať x.

Tretí člen rozvoja výrazu neobsahuje x.

Pr. 49

Urči súčet $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$.

$$(1+1)^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$$

Binomická veta pre $a=1$, $b=1$.

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n} = 2^n$$

Pr. 50

Použitím binomickej vety dokáž, že výraz $40^n - 8^n - 5^n + 1$ je pre každé $n \in \mathrm{N}$ deliteľný 28.

$40^n - 8^n - 5^n + 1 = 5^n\cdot 8^n - 8^n - 5^n + 1 =$ — Upravíme výraz.

$= 8^n(5^n - 1) - (5^n - 1) = (5^n - 1)\cdot(8^n - 1)$ — Upravíme osobitne prvý i druhý člen súčinu.

$(5^n - 1) = (4+1)^n - 1 = 4k_1;\ k_1 \in \mathrm{N}$ — Rozvoj dvojčlena $(4+1)^n$ končí číslom 1, to sa zruší s číslom -1.

$8^n - 1 = (7+1)^n - 1 = 7\cdot k_2;\ k_2 \in \mathrm{N}$ — Všetky ostatné členy rozvoja výrazu $(4+1)^n$ obsahujú násobok

$(5^n - 1)\cdot(8^n - 1) = 4k_1\cdot 7k_2 = 28k_1k_2$ — čísla 4. Obdobne upravíme druhý člen súčinu.

Výraz $40^n - 8^n - 5^n + 1 = 28k_1k_2$, teda je deliteľný 28.

Usporiadajme binomické koeficienty mocnín dvojčlenov $(a+b)^n$ pre $n = 1, 2, 3, 4, 5...$ do nasledujúcej schémy:

$$
\begin{array}{ccccccccccc|l}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \text{pre } n = 0 \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \text{pre } n = 1 \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \text{pre } n = 2 \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \text{pre } n = 3 \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \text{pre } n = 4 \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \text{pre } n = 5 \\
 & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

atď.

Ak ju vyčíslime, dostaneme nasledujúcu schému:

$$
\begin{array}{ccccccccccc|l}
 & & & & & 1 & & & & & & \text{pre } n = 0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & \text{pre } n = 1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \text{pre } n = 2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \text{pre } n = 3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \text{pre } n = 4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \text{pre } n = 5 \\
 & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

atď.

Táto trojuholníková schéma sa nazýva PASCALOV TROJUHOLNÍK. Na ramenách trojuholníka sú v jednotlivých riadkoch čísla 1, ostatné čísla v riadkoch dostaneme vždy ako súčty čísel v riadku nad nimi (číslo nad + jeho ľavý sused, napr. $6 = 3 + 3, 10 = 4 + 6$).

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

36. Pravdepodobnosť

Obsah kapitoly:

Náhodné pokusy

PRAVDEPODOBNOSŤ sa zaoberá matematickými zákonitosťami, ktoré sa prejavujú v náhodných pokusoch. Tieto zákonitosti majú opodstatnenosť len pri dostatočne veľkom počte pokusov.

NÁHODNÉ POKUSY sú pokusy, ktoré pri dodržaní predpísaných podmienok vedú k rôznym výsledkom. Tieto výsledky však závisia nielen od predpísaných podmienok, ale aj od náhody.

Ku klasickým náhodným pokusom patrí napr. žrebovanie lotérie, ťahy športky, hody mincami, hody hracími kockami.

Množina možných výsledkov pokusu a javy

Pri každom náhodnom pokuse vieme vopred vymenovať všetky možné výsledky. Tieto sa navzájom vylučujú a jeden z nich nastane vždy. Túto množinu možných výsledkov označujeme Ω, jej ľubovoľný prvok ω.

Ak má množina Ω m prvkov, tak existuje celkom 2^m rôznych javov.

Podmnožiny množiny možných výsledkov nazývame JAVY. Označujeme ich A, B, C...

Prázdna množina $\emptyset$ sa nazýva NEMOŽNÝ JAV.
Množinu Ω nazývame ISTÝ JAV.

Uvažujme o hádzaní hracou kockou a zisťovaní čísla, ktoré „padlo" na hornej stene kocky. Množina možných výsledkov má vtedy šesť prvkov, teda $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Skúmaným javom môže byť to, či padlo párne číslo.

O javoch platí všetko, čo platí o množinách:

- Ak $\omega \in A$, hovoríme, že výsledok ω je PRIAZNIVÝ JAVU A.
- Ak je $A \subset B$, hovoríme, že jav A je PODJAVOM JAVU B.
- Jav $A \cup B$ (ZJEDNOTENIE JAVOV A a B) nastáva práve vtedy, keď nastane aspoň jeden z javov A alebo B.
- Jav $A \cap B$ (PRIENIK JAVOV A a B) nastáva vtedy, ak nastanú oba javy A a B.
- Ak $A \cap B = \emptyset$, hovoríme: JAVY A a B SA navzájom VYLUČUJÚ.
- Jav A', ktorý nastáva práve vtedy, keď jav A nenastáva, nazývame JAVOM OPAČNÝM k javu A v množine Ω.

Bernulliho schéma

$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Nech nejaký pokus má množinu výsledkov Ω. Vykonajme tento pokus n-krát a pre každý možný výsledok ω zaznamenajme, koľko pokusov skončilo práve týmto výsledkom.

Toto číslo $n(\omega)$ nazveme POČETNOSŤOU VÝSLEDKOV ω.

Podiel $\frac{n(\omega)}{n}$ nazveme RELATÍVNOU POČETNOSŤOU výsledkov ω.

O tomto čísle platí $0 \le \frac{n(\omega)}{n} \le 1$.

Hodili sme 10-krát hracou kockou s výsledkami 1, 6, 4, 1, 5, 5, 3, 1, 2, 4. Odtiaľ vyplývajú nasledujúce početnosti jednotlivých výsledkov pokusu $n(1) = 3$, $n(2) = 1$, $n(3) = 1$, $n(4) = 2$, $n(5) = 2$, $n(6) = 1$. Najväčšiu početnosť má jav, keď padlo číslo 1. Relatívna početnosť tohto javu je $\frac{3}{10}$.

Ak má náhodný pokus m možných výsledkov a ak sú tieto výsledky rovnako možné (alebo rovnako pravdepodobné), tak o každom z nich hovoríme, že má pravdepodobnosť $\frac{1}{m}$.

Pri hádzaní kockou môže nastať 6 rôznych výsledkov. Všetky sú rovnako pravdepodobné.

Ak uvažujeme o náhodnom pokuse s množinou výsledkov Ω, tak pravdepodobnosti $p(\omega)$ týchto výsledkov sú nezáporné čísla, ktorých súčet sa rovná jeden.

Pravdepodobnosti javov

PRAVDEPODOBNOSŤ JAVU A označujeme $P(A)$.
Je definovaná ako súčet pravdepodobností výsledkov priaznivých javu A, čiže $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$.

Ak má pokus m rovnako pravdepodobných výsledkov, tak $P(A) = \frac{m(A)}{m}$, pričom $m(A)$ je počet výsledkov priaznivých javu A.

Z tejto definície vyplýva, že:

- pravdepodobnosť nemožného javu sa rovná 0, čiže $P(\emptyset) = 0$,
- pravdepodobnosť istého javu sa rovná 1, čiže $P(\Omega) = 1$,
- o pravdepodobnosti ľubovoľného javu A platí: $0 \le P(A) \le 1$.

Hádžeme kockou a skúmame jav A, či padne párne číslo. Pravdepodobnosť tohto javu $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (vypočítame ju buď ako súčet pravdepodobností výsledkov priaznivých javov, alebo ako podiel priaznivých a možných výsledkov javu).

Pr. 1

Hádžme štyrmi mincami, ktoré vieme rozoznať (prvú až štvrtú). Na každej minci môže padnúť líce alebo rub, označíme to *l* a *r*. Aká je pravdepodobnosť javu A: líce padlo aspoň na troch minciach?

llll *lrll* *rlll* *rrll*
lllr *lrlr* *rllr* *rrlr*
llrl *lrrl* *rlrl* *rrrl*
llrr *lrrr* *rlrr* *rrrr*

Výpis všetkých možných výsledkov, je ich 16.

llll, *lllr*, *llrl*, *lrll*, *rlll*

Výpis priaznivých výsledkov, je ich 5.

$P(A) = \frac{5}{16} = 0{,}312\,5$

Pravdepodobnosť, že líce padne aspoň na troch minciach, je 0,312 5.

Pr. 2

Aká je pravdepodobnosť výhry 5. ceny v športke?
5. cenu získame, ak uhádneme aspoň tri čísla zo 6 vyžrebovaných.

$\binom{6}{3}$ Počet spôsobov, ktorými sa dajú vybrať 3 čísla zo 6 vyžrebovaných.

$\binom{43}{3}$ Počet spôsobov, ktorými sa dajú vybrať 3 čísla zo 43 nevyžrebovaných čísel.

$\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}$ Počet priaznivých výsledkov (spájame vždy trojicu vyžrebovaných čísel s trojicou nevyžrebovaných čísel).

$\binom{49}{6}$ Počet možných výsledkov žrebovania.

$$P(A) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} \doteq 0{,}017\,65$$

Pravdepodobnosť výhry 5. ceny v športke je asi 0,017 65.

Pr. 3

V debni je 30 výrobkov, z ktorých sú tri chybné. Aká je pravdepodobnosť javu A, že medzi 5 náhodne vybranými výrobkami bude najviac jeden chybný?

$\binom{30}{5}$ Počet možných výsledkov.

$\binom{27}{5}+\binom{27}{4}\cdot\binom{3}{1}$ Počet priaznivých výsledkov (buď výber 5 bezchybných výrobkov z 27 alebo výber 4 bezchybných výrobkov z 27 a jedného chybného z 3).

$$P(\mathsf{A})=\frac{\binom{27}{5}+\binom{27}{4}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{30}{5}}\doteq 0{,}936$$

Pravdepodobnosť, že medzi 5 vybranými výrobkami bude najviac jeden chybný, je približne 0,936.

Sčítanie pravdepodobností

Nech sa javy A a B navzájom vylučujú. Pravdepodobnosť zjednotenia dvoch navzájom vylučujúcich sa javov $P(\mathsf{A}\cup\mathsf{B})=P(\mathsf{A})+P(\mathsf{B})$.

Obdobné tvrdenie môžeme vyjadriť i pre viac než dva javy.

Ak $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_r$ sú navzájom sa vylučujúce javy, teda $\mathsf{A}_i\cap\mathsf{A}_j=\varnothing$, pričom $i\neq j$, tak $P(\mathsf{A}_1\cup\mathsf{A}_2\cup\ldots\cup\mathsf{A}_r)=P(\mathsf{A}_1)+P(\mathsf{A}_2)+\ldots+P(\mathsf{A}_r)$.

Pr. 4

Hádžeme tromi kockami.
Urči, aká je pravdepodobnosť javu, že aspoň na jednej kocke „padne" šestka.

$\mathsf{B}_1: P(\mathsf{A}_1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$

$P(\mathsf{A}_2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$

$P(\mathsf{A}_3)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$

$P(\mathsf{B}_1)=P(\mathsf{A}_1)+P(\mathsf{A}_2)+P(\mathsf{A}_3)=\frac{75}{216}\doteq 0{,}347\,22$

jav B_1 ... na jednej kocke padne šestka
jav A_1 ... šestka padne len na 1. kocke
jav A_2 ... šestka padne len na 2. kocke
jav A_3 ... šestka padne len na 3. kocke

$\mathsf{B}_2: P(\mathsf{C}_1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$

$P(\mathsf{C}_2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$

$P(\mathsf{C}_3)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$

$P(\mathsf{B}_2)=P(\mathsf{C}_1)+P(\mathsf{C}_2)+P(\mathsf{C}_3)=\frac{15}{216}\doteq 0{,}069\,44$

jav B_2 ... na dvoch kockách padne šestka
jav C_1 ... na 1. kocke padne šestka, na 2. kocke padne šestka, na 3. kocke nepadne šestka
jav C_2 ... na 1. kocke padne šestka, na 2. kocke nepadne šestka, na 3. kocke padne šestka
jav C_3 ... na 1. kocke nepadne šestka, na 2. kocke padne šestka, na 3. kocke padne šestka

$\mathsf{B}_3: P(\mathsf{B}_3)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}\doteq 0{,}004\,63$

jav B_3 ... na troch kockách padne šestka

$P(\mathsf{D})=P(\mathsf{B}_1)+P(\mathsf{B}_2)+P(\mathsf{B}_3)=$
$=0{,}347\,22+0{,}069\,44+0{,}004\,63=0{,}421\,3$

jav D ... aspoň na jednej kocke padne šestka

Iný (rýchlejší) spôsob riešenia: Uvažujme o jave D' „Ani na jednej kocke nepadne šestka".

Pravdepodobnosť, že aspoň na jednej kocke padne šestka, je približne 0,421 3.

Tento jav je opačný k javu D „Aspoň na jednej kocke padne šestka". Pritom o týchto javoch platí

$P(D')=1-P(D)$. $P(D')=\frac{5^3}{6^3}$, $P(D)=1-\frac{5^3}{6^3}=\frac{6^3-5^3}{6^3}=\frac{91}{216}\doteq 0{,}421\,3$

Ak sa javy A a B navzájom nevylučujú, čiže $A\cap B\neq\emptyset$, tak $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Pr. 5

Hádžme dvoma hracími kockami. Aká je pravdepodobnosť javu A „Aspoň na jednej kocke padne šestka"?

$P(A_1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$ jav A_1 ... na 1. kocke padne šestka a zároveň na 2. kocke nepadne šestka

$P(A_2)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$ jav A_2 ... na 1. kocke nepadne šestka a zároveň na 2. kocke padne šestka

$P(A_3)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$ jav A_3 ... na 1. kocke padne šestka a zároveň na 2. kocke padne šestka

Všetky tieto javy sa navzájom vylučujú.

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{5}{36}+\frac{5}{36}+\frac{1}{36}=\frac{11}{36}\doteq 0{,}305\,6$$

Iný spôsob riešenia:

Vypíšeme si pomocou usporiadaných dvojíc situácie, ktoré môžu nastať.

Číslica na prvom mieste sa týka 1. kocky, číslica na druhom mieste sa týka 2. kocky.

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

$P(A)=\frac{6}{36}$ ... pravdepodobnosť, že na 1. kocke padne 6

$P(B)=\frac{6}{36}$ ... pravdepodobnosť, že na 2. kocke padne 6

Tieto javy sa navzájom nevylučujú.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{6}{36}+\frac{6}{36}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}\doteq 0{,}305\,6$

Pravdepodobnosť javu, že aspoň na jednej kocke padne šestka, je približne 0,305 6.

Pre tri navzájom sa nevylučujúce javy A, B, C platí:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

Nezávislé javy

O dvoch javoch hovoríme, že sú nezávislé, ak uskutočnenie jedného javu nemá vplyv na uskutočnenie či neuskutočnenie druhého javu.

Hovoríme, že JAVY A a B sú NEZÁVISLÉ, ak $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

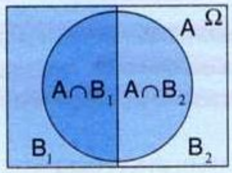
Podmienená pravdepodobnosť

PODMIENENÁ PRAVDEPODOBNOSŤ JAVU A ZA PREDPOKLADU, že jav B už nastal

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, pričom $P(B) \neq 0$.

O pravdepodobnosti, že nastanú vzájomne závislé javy A, B s podmienenými pravdepodobnosťami $P(A|B)$, $P(B|A)$, platí: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$.

Ak sú dané dva javy B_1 a B_2, ktoré sa navzájom vylučujú, pričom jeden z nich vždy nastane, čiže $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $B_1 \cup B_2 = \Omega$, tak pre ľubovoľný jav A platí $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$. Oba javy $(A \cap B_1)$ a $(A \cap B_2)$ sa opäť vylučujú, teda $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)$, resp. použitím vzťahu z predchádzajúcej vety dostávame $P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)$. Tento vzťah nazývame VZOREC PRE CELKOVÚ PRAVDEPODOBNOSŤ.



Pr. 6

V osudí je 9 bielych gúľ a 1 červená guľa. Vytiahneme jednu guľu, vrátime ju a pridáme guľu rovnakej farby. Potom ťaháme druhýkrát.

a) Urči, aká je pravdepodobnosť, že v oboch ťahoch vytiahneme červenú guľu.

b) Urči pravdepodobnosť, že v oboch ťahoch vytiahneme bielu guľu.

c) Urči, aká je pravdepodobnosť $P(C_2)$, že v druhom ťahu vytiahneme červenú guľu (pravdepodobnosť nepodmieňujeme výsledkom 1. ťahu).

a) C_1, C_2 — Označenie javov vytiahnutia červenej gule v 1. ťahu, v 2. ťahu.

$P(C_1) = \dfrac{1}{10}$ — Pravdepodobnosť vytiahnutia červenej gule v 1. ťahu.

$P(C_2|C_1) = \dfrac{2}{11}$ — Pravdepodobnosť vytiahnutia červenej gule v 2. ťahu, ak bola vytiahnutá aj v 1. ťahu.

$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2|C_1) = \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{2}{11} \doteq 0{,}018$

Pravdepodobnosť vytiahnutia červenej gule v oboch ťahoch je asi 0,018.

b) B_1, B_2 — Označenie javov vytiahnutia bielej gule v 1. ťahu, v 2. ťahu.

$P(B_1) = \dfrac{9}{10}$ — Pravdepodobnosť vytiahnutia bielej gule v 1. ťahu.

$P(B_2|B_1) = \dfrac{10}{11}$ — Pravdepodobnosť vytiahnutia bielej gule v 2. ťahu, ak bola vytiahnutá aj v 1. ťahu.

$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) = \dfrac{9}{10} \cdot \dfrac{10}{11} = \dfrac{9}{11} \doteq 0{,}818$

Pravdepodobnosť vytiahnutia bielej gule v oboch ťahoch je asi 0,818.

c) $P(C_2) = P(B_1) \cdot P(C_2|B_1) + P(C_1) \cdot P(C_2|C_1) =$
$= \dfrac{9}{10} \cdot \dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{2}{11} = \dfrac{11}{110} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

Máme dve možnosti, buď vytiahneme v 1. ťahu bielu guľu a v 2. ťahu červenú, alebo vytiahneme v 1. aj 2. ťahu červenú guľu.

Pravdepodobnosť vytiahnutia červenej gule v 2. ťahu je 0,1.

Obsah kapitoly:

- Štatistický súbor
- Charakteristika štatistického súboru

37. Štatistika

Štatistický súbor

ŠTATISTICKÝ SÚBOR je konečná neprázdna množina M objektov štatistického pozorovania, ktoré majú isté spoločné vlastnosti. Prvky tejto množiny sa nazývajú **ŠTATISTICKÉ JEDNOTKY** (prvky štatistického súboru). Počet všetkých štatistických jednotiek voláme **ROZSAH SÚBORU** n.

ŠTATISTICKÝ ZNAK x je spoločná vlastnosť prvkov štatistického súboru, ktorej premenlivosť je predmetom štatistického skúmania. Jednotlivé údaje znaku sa nazývajú **HODNOTY ZNAKU** a označujú sa $x_1, x_2, \ldots, x_n$. **KVANTITATÍVNE ZNAKY** majú hodnoty vyjadrené číslami, **KVALITATÍVNE ZNAKY** majú hodnoty vyjadrené slovným opisom.

ABSOLÚTNA POČETNOSŤ hodnoty znaku x_i je číslo, ktoré udáva, koľkokrát sa v súbore M vyskytuje hodnota x_i. Označuje sa n_i. **RELATÍVNA POČETNOSŤ** hodnoty znaku x_i je daná podielom $\frac{n_i}{n}$, kde n_i je absolútna početnosť hodnoty znaku x_i, n je rozsah súboru M. Zvyčajne sa udáva v percentách: $\frac{n_i}{n} \cdot 100\,\%$.

Štatistický súbor sa spracúva pomocou tabuliek, grafov a pod. s použitím výpočtovej techniky.

Charakteristika štatistického súboru

Charakteristika polohy

CHARAKTERISTIKOU POLOHY hodnôt znaku sú čísla, ktoré určitým spôsobom charakterizujú „priemernú hodnotu" sledovaného znaku.

ARITMETICKÝ PRIEMER hodnôt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kvantitatívneho znaku x je:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Znak x často nadobúda len určitý počet r ($r < n$) rôznych hodnôt, ktoré označíme $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_r^*$. Pre každú možnú hodnotu x_j^* potom zistíme, koľkokrát sa vyskytla medzi $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tento počet n_j nazývame početnosť hodnoty x_j^*.

Súčet početností všetkých možných hodnôt znaku sa rovná $\sum_{j=1}^{r} n_j = n$.

Tabuľku vpravo nazývame **ROZDELENIE POČETNOSTÍ ZNAKU**:

znak x	x_1^*	x_2^*	$\cdots$	x_r^*
početnosť	n_1	n_2	$\cdots$	n_r

Ak počítame aritmetický priemer z tabuľky rozdelenia početností, musíme každú hodnotu vynásobiť jej početnosťou, použijeme teda vzorec $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} x_j^* n_j$.

Pr. 1

Meriame výšku postavy s presnosťou na 1 cm. Hodnoty kvantitatívneho znaku však postupujú v príliš malých krokoch, preto ich združíme do 5-centimetrových intervalov. Hodnoty z toho istého intervalu zaokrúhľujeme na stred intervalu. Tabuľku rozdelenia početností môžeme potom zapísať dvomi spôsobmi:

1. spôsob

x_j^*	158-162	163-167	168-172	173-177	178-182	183-187	188-192
n_j	9	20	36	82	35	14	4

2. spôsob	x_j^*	160	165	170	175	180	185	190
	n_j	9	20	36	82	35	14	4

Urči priemernú výšku postavy.

$$\bar{x} = \frac{160\cdot 9 + 165\cdot 20 + 170\cdot 36 + 175\cdot 82 + 180\cdot 35 + 185\cdot 14 + 190\cdot 4}{200} = \frac{34\,860}{200} \doteq 174{,}3 \text{ (cm)}$$

Priemerná výška postavy je približne 174,3 cm.

GEOMETRICKÝ PRIEMER $\bar{x}_G$ hodnôt $z_1, z_2, \ldots, z_n$ znaku z je $\bar{x}_G = \sqrt[n]{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n}$.

MODUS ZNAKU x je hodnota x s najväčšou početnosťou. Označuje sa $Mod(x)$.

Pr. 2

Zisti $Mod(x)$ z Pr. 1.

$Mod(x)$ z predchádzajúceho príkladu sa rovná 175 alebo presnejšie, modus je interval 173 - 177.

MEDIÁN ZNAKU x, označuje sa $Med(x)$, je prostredná hodnota znaku.
Ak sú hodnoty znaku x usporiadané podľa veľkosti, teda
$x_{(1)} \le x_{(2)} \le x_{(3)} \le \ldots \le x_{(n)}$, tak

$Med(x) = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$, ak je n nepárne,

a $Med(x) = \frac{1}{2}\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n+2}{2}\right)}\right) = \frac{1}{2}\left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right)$, ak je n párne.

Pr. 3

Urči $Med(x)$ z Pr. 1.

$$Med(x) = \frac{x_{100} + x_{101}}{2} = \frac{175+175}{2} = 175$$

$Med(x)$ z príkladu 1 je 175.

Pr. 4

Súborom je 20 členov družstva, znakom x je ich ročný príjem v tisíckach korún s rozdelením početností v nasledujúcej tabuľke. Urči priemerný ročný príjem a medián.

ročný príjem	30	40	50	60	70	840
početnosť	1	6	6	5	1	1

$$\bar{x} = \frac{30\cdot 1 + 40\cdot 6 + 50\cdot 6 + 60\cdot 5 + 70\cdot 1 + 840\cdot 1}{20} = \frac{30 + 240 + 300 + 300 + 70 + 840}{20} = 89 \text{ (tisíc Sk)}$$

$$Med(x) = \frac{x_{(10)} + x_{(11)}}{2} = 50 \text{ (tisíc Sk)}$$

Medián je v tomto prípade vhodnejšou charakteristikou. Väčšina členov družstva má nižší príjem, než je priemerný ročný príjem.

Priemerný ročný príjem člena družstva je 89 tisíc korún a medián príjmu členov je 50 tisíc korún.

$HP \le AP \le GP$

Harmonický priemer je jemnejší ako AP

Charakteristika variability

Každá charakteristika polohy je číslo, okolo ktorého jednotlivé hodnoty znaku kolíšu (oscilujú). Veľkosť tohto kolísania vyjadrujú CHARAKTERISTIKY VARIABILITY (premenlivosti) znaku.

Ak je charakteristikou polohy aritmetický priemer, tak za charakteristiku variability volíme obvykle ROZPTYL, ktorý je definovaný ako priemer druhých mocnín odchýlok od aritmetického priemeru. Ak označíme rozptyl znaku symbolom s_x^2, tak:

$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ resp. $s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r}(x_j^* - \bar{x})^2 \cdot n_j$, ak počítame rozptyl z tabuľky početností.

Ak vykonáme naznačené umocnenie vo vzorcoch, dostávame:

$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}^2$ resp. $s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r}x_j^{*2} \cdot n_j - \bar{x}^2$.

SMERODAJNÁ ODCHÝLKA s_x je definovaná ako druhá odmocnina rozptylu

$s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ resp. $s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r}(x_j^* - \bar{x})^2 \cdot n_j}$.

VARIAČNÝ KOEFICIENT v_x je definovaný ako podiel smerodajnej odchýlky a aritmetického priemeru. Vyjadrujeme ho obvykle v percentách, čiže $v_x = \frac{s_x}{\bar{x}} \cdot 100\,\%$.

Pr. 5

Pri desiatich opakovaných meraniach istej fyzikálnej veličiny sme dostali výsledky:
$x_1 = 2{,}11$; $x_2 = 2{,}01$; $x_3 = 2{,}09$; $x_4 = 2{,}02$; $x_5 = 2{,}03$; $x_6 = 2{,}03$; $x_7 = 2{,}11$; $x_8 = 2{,}10$; $x_9 = 2{,}05$; $x_{10} = 2{,}05$.
Vypočítaj priemernú hodnotu merania, smerodajnú odchýlku, rozptyl a variačný koeficient.

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i = \frac{1}{10}\cdot 20{,}6 = 2{,}06$$

$$s_x^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 =$$

$$= \frac{1}{10}\left[0{,}05^2 + 0{,}05^2 + 0{,}03^2 + 0{,}04^2 + 0{,}03^2 + 0{,}03^2 + 0{,}05^2 + 0{,}04^2 + 0{,}01^2 + 0{,}01^2\right] = 0{,}001\,36$$

$s_x \doteq 0{,}037$

$v_x \doteq 1{,}8\ \%$

Priemer merania je 2,06, rozptyl merania je 0,001 36, smerodajná odchýlka merania je 0,037 a variačný koeficient je 1,8 %.

V praxi často sledujeme, či a ako sú od seba závislé dva znaky x a y. Mieru závislosti opisuje KOEFICIENT KORELÁCIE r. Ak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú hodnoty znaku x a $y_1, y_2, \ldots, y_n$ hodnoty znaku y, tak koeficient korelácie znakov x a y je

$r = \frac{k}{s_x s_y}$, pričom $k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})$,

$s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$, $s_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$.

Vždy platí $|r| \leq 1$. Čím viac sa hodnota r blíži k 1, tým považujeme závislosť x a y za väčšiu.

Koeficient korelácie je bezrozmerné číslo.

38. Limita a spojitosť funkcie

Obsah kapitoly:

V predchádzajúcich kapitolách sme sa zaoberali aj vlastnosťami funkcií, riešili sme úlohy typu „Vyšetri funkciu f a načrtni jej graf." Často sme zistili, že hodnoty funkcie sa blížia (konvergujú) k istému konkrétnemu číslu. V matematike pojem limita formalizuje a spresňuje pojem „blížiť sa".

Definícia limity funkcie

Nech M je otvorený interval obsahujúci bod a a funkcia f je definovaná na množine $\mathsf{M}-\{a\}$. Hovoríme, že funkcia f má v bode a limitu L, keď ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre všetky $x \in \mathsf{M}-\{a\}$, pre ktoré $|x-a| < \delta$, je $|f(x)-L| < \varepsilon$.

Ak máme teda dokázať, že $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, tak ku každému $\varepsilon > 0$ musíme nájsť $\delta > 0$ tak, aby platili nerovnosti $|x-a| < \delta$ a $|f(x)-L| < \varepsilon$.

Pr. 1

Ukáž, že $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-12}{x-2} = 12$ (v zmysle predchádzajúcej definície).

Funkcia $f(x) = \dfrac{3x^2-12}{x-2}$ je definovaná na množine $\mathsf{R}-\{2\}$
a pre všetky $x \neq 2$ platí $f(x) = \dfrac{3x^2-12}{x-2} = 3x+6$.
Ak ku každému $\varepsilon > 0$ nájdeme $\delta > 0$ tak, aby platili nerovnosti $|x-2| < \delta$ a $|3x+6-12| < \varepsilon$,

tak sme úlohu splnili.

a) Zvoľme $\varepsilon = 6$. Ak platí $|3x+6-12| < 6$, tak $|3(x-2)| < 6$ aj $|x-2| < 2$. Čiže $\delta \le 2$.

b) Zvoľme $\varepsilon = 3$. Ak platí $|3x+6-12| < 3$, tak $|3(x-2)| < 3$ aj $|x-2| < 1$. Čiže $\delta \le 1$.

c) Zvoľme $\varepsilon = 10^{-2}$. Ak platí $|3x+6-12| < 10^{-2}$, tak $|3(x-2)| < 10^{-2}$ aj $|x-2| < \dfrac{10^{-2}}{3}$. Čiže $\delta \le \dfrac{10^{-2}}{3}$.

Vidíme, že ku každému $\varepsilon > 0$ stačí voliť $\delta \le \dfrac{\varepsilon}{3}$ a nerovnosti $|x-2| < \delta$ a $|3x+6-12| < \varepsilon$ budú platiť.

To však znamená, že $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-12}{x-2} = 12$.

Pr. 2

Ukáž, že $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-12}{x-2} = 13$.

Postupujeme obdobne ako v príklade 1.

Funkcia $f(x) = \dfrac{3x^2-12}{x-2}$ je definovaná na množine $\mathsf{R}-\{2\}$
a pre všetky $x \neq 2$ platí $f(x) = \dfrac{3x^2-12}{x-2} = 3x+6$.
Ak ku každému $\varepsilon > 0$ nájdeme $\delta > 0$ tak, aby platili nerovnosti $|x-2| < \delta$ a $|3x+6-13| < \varepsilon$,

tak sme úlohu splnili.

a) Zvoľme $\varepsilon = 6$. Ak platí $|3x+6-13| < 6$, tak $\left|x-\dfrac{7}{3}\right| < 2$ aj $|x-2| < \dfrac{5}{3}$. Čiže $\delta \le \dfrac{5}{3}$.

b) Zvoľme $\varepsilon = 3$. Ak platí $|3x+6-13| < 3$, tak $\left|x-\frac{7}{3}\right| < 1$ aj $|x-2| < \frac{2}{3}$. Čiže $\delta \le \frac{2}{3}$.

c) Zvoľme $\varepsilon = 10^{-2}$. Ak platí $|3x+6-13| < 10^{-2}$, tak $\left|x-\frac{7}{3}\right| < \frac{10^{-2}}{3}$. V tomto prípade však vhodné δ nenájdeme, pretože $\frac{7}{3} - \frac{1}{300} > 2$. To však znamená, že $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-12}{x-2} \ne 13$.

Zápis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ môžeme čítať aj takto: *Čím je hodnota premennej x bližšie k a, tým je funkčná hodnota bližšie k L.*
Teda v príklade 1 sme zistili, že „čím je hodnota premennej x bližšie k 2, tým je hodnota zlomku $\frac{3x^2-12}{x-2}$ bližšie k 12".

Každá funkcia má v danom bode najviac jednu limitu. Napríklad $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ neexistuje.

Definícia spojitosti funkcie

Často používame pojem spojitá funkcia. Intuitívne si predstavujeme, že spojitou funkciou na nejakom intervale I je taká funkcia, ktorej graf možno nakresliť jedným ťahom, resp. grafom je neprerušená čiara. Presná definícia spojitosti funkcie je myšlienkovo podobná definícii limity funkcie.

Hovoríme, že **funkcia f je spojitá v bode a**, keď:
a) je v bode a definovaná,
b) ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre všetky x, pre ktoré $|x-a| < \delta$, je $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

Poslednú vetu niekedy čítame aj takto: „ku každému ε-ovému okoliu bodu $f(a)$ existuje také δ okolie bodu a, že pre všetky x z tohto okolia je $f(x)$ z ε-ového okolia bodu $f(a)$.

Z definície limity funkcie a z definície spojitosti funkcie vyplýva:
1. Ak je funkcia definovaná v bode a a je v tomto bode aj spojitá, tak jej limita sa rovná jej funkčnej hodnote v bode a, teda $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
2. Ak k funkcii f a k otvorenému intervalu I obsahujúcemu bod a existuje taká funkcia g spojitá na intervale I, že $f(x) = g(x)$ pre všetky $x \in \mathrm{I} - \{a\}$, tak limitou funkcie f v bode a je $g(a)$. Teda $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$.

Vety o limitách

Polynomické funkcie, goniometrické funkcie, exponenciálne a logaritmické funkcie sú spojité všade tam, kde sú definované.

Ak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = F$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = G$, tak:
a) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = F+G$ (limita súčtu funkcií),
b) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)] = F-G$ (limita rozdielu funkcií),
c) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = F\cdot G$ (limita súčinu funkcií).
Ak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = F$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = G$ a $G \ne 0$, tak $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$ (limita podielu funkcií).

Ak $y = f(x) = k$ (funkcia f je konštantná funkcia), tak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k$.

Pr. 3

Vypočítaj $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-12x+35}{x-5}$.

$f(x) = \frac{x^2-12x+35}{x-5} = \frac{(x-5)\cdot(x+7)}{x-5} = x-7 = g(x) \wedge x \ne 5$. K funkcii f sme našli spojitú funkciu g, a tak platí: $d\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-12x+35}{x-5} = \lim\limits_{x\to 5}(x-7) = -2$

Pr. 4

Vypočítaj $\lim\limits_{x\to 5}\left[\dfrac{x^2-12x+35}{x-5}-(2x-3)\right]$.

Použijeme vetu o limite rozdielu funkcií a dostávame

$$\lim_{x\to 5}\left[\frac{x^2-12x+35}{x-5}-(2x-3)\right]=\lim_{x\to 5}\frac{x^2-12x+35}{x-5}-\lim_{x\to 5}(2x-3)=-2-7=-9.$$

Pr. 5

Pri opise vlastností funkcií z príkladov 2 a 3 zo 17. kapitoly použi limitu.

Z obrázkov grafov funkcií je zrejmé, že $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1$ a $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}=2$.

Definícia limity v nevlastnom bode

Hovoríme, že $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$, ak ku každému $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ tak, že pre všetky $x>\delta$ je $|f(x)-L|<\varepsilon$. Túto limitu nazývame aj limita v nevlastnom bode. Každá funkcia má najviac jednu limitu v nevlastnom bode. Ak táto limita existuje, hovoríme, že funkcia konverguje. Ak neexistuje, hovoríme, že funkcia diverguje. Obdobne sa definuje aj $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Platí, že $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ a $\lim\limits_{x\to\infty} q^x=0$, ak $|q|<1$. Túto skutočnosť využívame pri výpočtoch limít.

Tieto dve tvrdenia sa dajú dokázať pomocou definície limity (podobný postup ako v príklade 1).

Pr. 6

Vypočítaj $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\frac{2-0}{1-0}=2$$

Zlomok sme krátili číslom x ($x\to 0\Rightarrow x\neq 0$), použili sme vety o limitách a známu limitu.

Riešenie príkladu 6 je vlastne návodom na určenie jednej asymptoty niektorých funkcií.

Pr. 7

Vypočítaj $\lim\limits_{x\to\infty} a\dfrac{1-q^x}{1-q}$, ak $a\neq 0\wedge|q|<1$.

$$\lim_{x\to\infty} a\frac{1-q^x}{1-q}=a\cdot\frac{1-\lim\limits_{x\to\infty}q^x}{1-q}=a\cdot\frac{1-0}{1-q}=\frac{a}{1-q}$$

V príklade 7 sme vlastne určili súčet nekonečného geometrického radu (pozri kapitolu 22). Ak $|q|\geq 1$, tak nekonečný geometrický rad nemá súčet (diverguje).

Pr. 8

Vypočítaj $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5(x+h)^3+4(x+h)-\left(5x^3+4x\right)}{h}$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)^3+4(x+h)-\left(5x^3+4x\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{5(x+h)^3-5x^3}{h}+\frac{4(x+h)-4x}{h}\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)^3-5x^3}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)-4x}{h}=15x^2+4$$

39. Derivácia funkcie

Obsah kapitoly:

- Definícia derivácie
- Vety o deriváciách
- Derivácia a priebeh funkcie

Pojem derivácie funkcie ako špeciálneho prípadu limity sa vytvoril v priebehu druhej polovice 17. storočia pri riešení konkrétnych fyzikálnych a geometrických úloh.

Pr. 1

Napíš rovnicu dotyčnice k parabole $y = x^2$ v jej bode $A[1; y]$.

$y - 1 = k(x-1)$ — Použijeme smernicový tvar rovnice priamky (pozri kapitolu 32), ktorá prechádza bodom A.

$B\left[1+h; (1+h)^2\right]$ — Bod B je bodom paraboly a $B \neq A$, ak $h \neq 0$.

$k_{AB} = \dfrac{(1+h)^2 - 1}{(1+h)-1} = \dfrac{h^2+2h}{h}$ — k_{AB} je smernica sečnice prechádzajúcej bodmi A, B.

$B \to A \Leftrightarrow h \to 0 \Leftrightarrow k_{AB} \to k$ — Čím je B bližšie k A, tým je hodnota smernice sečnice AB bližšie k hodnote smernice hľadanej dotyčnice.

$k = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2+2h}{h} = 2$

$y - 1 = 2(x-1)$ — Rovnica dotyčnice k danej parabole v bode A.

Dotyčnica k parabole $y = x^2$ v jej bode $A[1; y]$ má rovnicu $y - 1 = 2(x-1)$.

Pr. 2

Teleso sa pohybuje voľným pádom. Urči jeho okamžitú rýchlosť po uplynutí 1 sekundy od začiatku pohybu.

$$s(t) = \frac{g}{2}t^2 \Rightarrow s(1) = \frac{g}{2} \wedge s(1+h) = \frac{g}{2}(1+h)^2$$

$$pv = \frac{\frac{g}{2}(1+h)^2 - \frac{g}{2}}{(1+h)-1} = \frac{\frac{g}{2}\left(h^2+2h\right)}{h}$$

pv je priemerná rýchlosť pre $t \in \langle 1; 1+h\rangle$.

$h \to 0 \Rightarrow pv \to v$ — Čím je hodnota h bližšie k 0, tým je priemerná rýchlosť pv bližšie k okamžitej rýchlosti v.

$$v = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g}{2}\left(h^2+2h\right)}{h} = g$$

Po uplynutí 1 sekundy od začiatku pohybu sa teleso pohybuje okamžitou rýchlosťou g (približne $9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$).

Oba príklady mali jednu vec spoločnú, v oboch sme počítali limitu typu: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Definícia derivácie

DERIVÁCIOU FUNKCIE $f(x)$ v bode a nazývame

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, ak táto limita existuje.

Deriváciu funkcie $f(x)$ v bode a označujeme $f'(a)$.

V príklade 8 z predchádzajúcej kapitoly sme vlastne vypočítali deriváciu funkcie $f(x)=5x^3+4x$ v bode x, čiže $f'(x)=15x^2+4$.

Derivácia je vlastne pomer prírastkov $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, ak Δx je „veľmi malé".

Niekedy (zvyčajne vo fyzike) namiesto $y'=f'(x)$ píšeme $\dfrac{dy}{dx}$ a čítame „derivácia y podľa x", či namiesto $v=s'=f'(t)$ píšeme $\dfrac{ds}{dt}$ a čítame „derivácia s (dráhy) podľa t (času)".

Pr. 3

Vypočítaj deriváciu funkcie $f: y=ax^n$ v bode x_0 $(n\in \mathrm{N})$.

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{a(x_0+h)^n-ax_0^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a\left[nx_0^{n-1}h+\binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2+\ldots+h^n\right]}{h}=anx_0^{n-1}.$$

Vety o deriváciách

Ak funkcie f a g majú deriváciu v bode a, tak:

a) aj funkcia $f+g$ má deriváciu v bode a a platí $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$,

b) aj funkcia $f-g$ má deriváciu v bode a a platí $(f-g)'(a)=f'(a)-g'(a)$,

c) aj funkcia $f\cdot g$ má deriváciu v bode a a platí $(f\cdot g)'(a)=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)$,

d) aj funkcia $\dfrac{f}{g}$ má deriváciu v bode a a platí $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a)=\dfrac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{(g(a))^2}$, pričom $g(a)\neq 0$.

Derivácie niektorých elementárnych funkcií:

funkcia f	derivácia funkcie f'
$y=k$, k - konštanta	$y'=0$
$y=x^n$	$y'=n\cdot x^{n-1}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=e^x$	$y'=e^x$
$y=a^x$, $a\neq 1 \wedge a>0$	$y'=a^x\ \ln a$

Obsah pojmov „derivácia funkcie v bode" a „derivácia funkcie" je rôzny.

Pod deriváciou funkcie v bode rozumieme konkrétne číslo (hodnotu).

Derivácia funkcie je vlastne predpis (ďalšia funkcia), pomocou ktorého zisťujeme deriváciu v bode.

Derivácia a priebeh funkcie

Derivácie sú vhodné nielen na určenie dotyčnice a okamžitej rýchlosti (resp. na určenie pomeru prírastkov), ale aj na skúmanie priebehu funkcií, najmä na určenie intervalov, kde je daná funkcia rastúca, klesajúca, kde má extrémy. Uľahčuje nám riešenie mnohých úloh o funkciách, ktoré sme riešili v predchádzajúcich kapitolách.

Maximum a minimum (extrémy) funkcie sme definovali v 13. kapitole. Podľa tejto definície nemá funkcia $f\colon y = -2x|x-3|$, ktorej graf sme načrtli v pr. 7 z 15. kapitoly, ani maximum, ani minimum. No pri pohľade na graf tejto funkcie má zmysel definovať tzv. LOKÁLNE (miestne) EXTRÉMY a GLOBÁLNE EXTRÉMY.

Definícia extrémov v 13. kapitole je vlastne definícia globálnych extrémov.

Hovoríme, že funkcia f má v bode a LOKÁLNE MAXIMUM [minimum], ak pre všetky x z nejakého otvoreného intervalu obsahujúceho bod a platí $f(x) \le f(a)$ $[f(x) \ge f(a)]$.

Platia nasledujúce vety:

1. Ak má funkcia f v bode a lokálny extrém a $f'(a)$ existuje, tak $f'(a) = 0$.
2. Ak pre všetky $x \in (a, b)$ je $f'(a) > 0$, tak funkcia f je rastúca na (a, b).
3. Ak pre všetky $x \in (a, b)$ je $f'(a) < 0$, tak funkcia f je klesajúca na (a, b).

Pr. 4

Urči lokálne extrémy funkcie $f: y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 11$

$f'(x) = y' = x^2 - 2x - 3$ — Derivácia funkcie f v jej ľubovoľnom bode.

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3 \vee x_2 = -1$ — V týchto dvoch bodoch môže mať funkcia extrémy.

$x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ — Využijeme riešenie pr. 7 z 12. kapitoly.

$x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$

Derivácia funkcie f je na intervale $(-\infty, -1)$ kladná, teda na tomto intervale f rastie.
Derivácia funkcie f je na intervale $(-1, 3)$ záporná, teda na tomto intervale f klesá.
To však znamená, že v bode -1 má funkcia f lokálne maximum.

Derivácia funkcie f je na intervale $(-1, 3)$ záporná, teda na tomto intervale f klesá.
Derivácia funkcie f je na intervale $(3, \infty)$ kladná, teda na tomto intervale f rastie.
To však znamená, že v bode 3 má funkcia f lokálne minimum.

Pr. 5 Navrhni rozmery rotačného valca tak, aby mal pri danom povrchu maximálny objem.

$V = \pi r^2 v$ — Objem valca s polomerom podstavy r a výškou v. Objem V je funkciou dvoch premenných r, v.

$P = 2\pi r^2 + 2\pi r v$ — Povrch tohto valca – konštanta.

$v = \dfrac{P - 2\pi r^2}{2\pi r} \Rightarrow V = \pi r^2 \dfrac{P - 2\pi r^2}{2\pi r} = \dfrac{P \cdot r}{2} - \pi r^3$ — Objem V je funkciou r.

$V' = \dfrac{P}{2} - 3\pi r^2 \Rightarrow r^2 = \dfrac{P}{6\pi} \Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{P}{6\pi}}$ — Polomer $r > 0$.

$V' = \dfrac{P}{2} - 3\pi r^2 > 0 \Rightarrow r^2 < \dfrac{P}{6\pi} \Rightarrow |r| < \sqrt{\dfrac{P}{6\pi}}$ — Zisťujeme, kde funkcia rastie.

$V' = \dfrac{P}{2} - 3\pi r^2 < 0 \Rightarrow r^2 > \dfrac{P}{6\pi} \Rightarrow |r| > \sqrt{\dfrac{P}{6\pi}}$ — Zisťujeme, kde funkcia klesá.

Funkcia $V = \dfrac{P \cdot r}{2} - \pi r^3$ nadobúda maximálnu hodnotu pre $r = \sqrt{\dfrac{P}{6\pi}}$. Vtedy však pre v platí:

$$v = \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{P}{2\pi r} - r = \frac{P}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{6\pi}{P}} - \sqrt{\frac{P}{6\pi}} = \frac{3\sqrt{P}}{\sqrt{6\pi}} - \sqrt{\frac{P}{6\pi}} = 2\sqrt{\frac{P}{6\pi}} = 2r.$$

Valec s daným povrchom P má maximálny objem vtedy, keď jeho polomer $r = \sqrt{\dfrac{P}{6\pi}}$ a jeho výška $v = 2r$.

Pomocou derivácie rýchlo určíme aj vrchol tých parabol, ktoré sú grafmi kvadratických funkcií.

Napr. $y = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow y' = 2x - 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \dfrac{5}{2} \Rightarrow y = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow V\left[\dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{4}\right]$

V praxi je často užitočné zistiť pre danú funkciu jej priebeh v celom definičnom obore a načrtnúť jej graf. Pri jednoduchších funkciách vystačíme pritom s týmto postupom:

1. Zistíme definičný obor funkcie a jej body nespojitosti, prípadne iné vlastnosti, ktoré vyplývajú z jej definície (napr. ak je jej graf súmerný podľa osi y (párna funkcia) alebo podľa začiatku (nepárna funkcia), priesečníky so súradnicovými osami a i.). Ďalej zistíme, v ktorých bodoch má funkcia deriváciu a vypočítame ju.
2. Zistíme intervaly, kde je funkcia rastúca alebo klesajúca.
3. Nájdeme body, v ktorých má funkcia lokálne extrémy.

Vypočítame funkčné hodnoty vo významných bodoch, prípadne $\lim\limits_{h \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{h \to -\infty} f(x)$, ak tieto limity existujú.

Pr. 6

Vyšetrite priebeh funkcie f: $y = 3x^4 + 4x^3$ a načrtnite jej graf.

$D(f) = R$

$f(0) = 3 \cdot 0^4 + 4 \cdot 0^3 = 0 \Rightarrow [0; 0] \in f$

$f(x) = 3x^4 + 4x^3 = 0 \Rightarrow x^3(3x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow \left[-\dfrac{4}{3}; 0\right] \in f$ — priesečníky s osami x a y

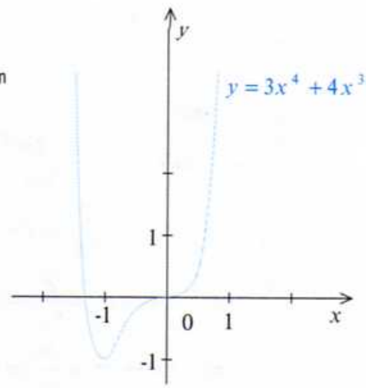
$f(x) = 3x^4 + 4x^3 \wedge f(-x) = 3x^4 - 4x^3 \Rightarrow$ funkcia nie je párna ani nepárna

$$f'(x)=\left(3x^4+4x^3\right)'=12x^3+12x^2$$ derivácia funkcie

$$12x^3+12x^2=12x^2(x+1)=0 \Rightarrow$$
$$x=0 \wedge x=-1$$
body, v ktorých môže mať funkcia lokálny extrém

$$12x^2(x+1)>0 \Rightarrow x>-1$$ funkcia rastie

$$12x^2(x+1)<0 \Rightarrow x<-1$$ funkcia klesá



Funkcia f: $y=3x^4+4x^3$ má v bode $x=-1$ lokálne minimum $y=-1$, klesá na $\left(-\infty;-1\right\rangle$ a rastie na $\left\langle -1;\infty\right)$.

Pr. 7

Vyšetrite priebeh funkcie g: $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ a načrtnite jej graf.

$$1-x^2=0 \Rightarrow \mathrm{D}(g)=\mathrm{R}-\{\pm 1\}$$ funkcia nie je spojitá v bodoch $x=\pm 1$

$$g(x)=\frac{x}{1-x^2} \wedge g(-x)=\frac{x}{1-x^2} \Rightarrow$$ funkcia g je nepárna a stačí ju vyšetrovať na intervale $\left\langle 0;\infty\right)$

$$g(0)=\frac{0}{1-0^2}=0 \Rightarrow [0;0]\in g$$

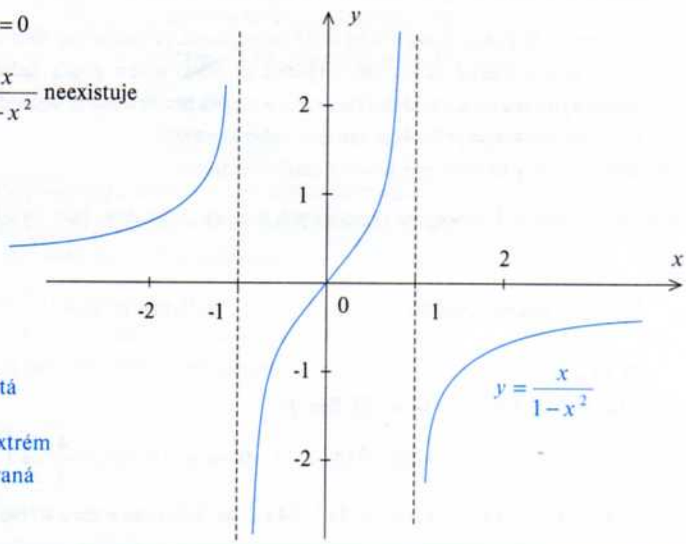
$$g(x)=\frac{x}{1-x^2}=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow [0;0]\in g$$ priesečníky s osami x a y

$$g'(x)=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$$ derivácia funkcie

$$\frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^2}\geq 0$$ derivácia funkcie je vždy nezáporná, čiže funkcia rastie na množinách, na ktorých je definovaná

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-x^2}=0 \wedge \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1-x^2}=0$$

$$\lim_{x\to+1}\frac{x}{1-x^2}\text{ neexistuje} \wedge \lim_{x\to-1}\frac{x}{1-x^2}\text{ neexistuje}$$



Funkcia g: $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ nie je spojitá v bodoch $x=\pm 1$, nemá lokálny extrém a rastie všade tam, kde je definovaná (no nie na $\mathrm{D}(g)$).

40. Neurčitý a určitý integrál

Obsah kapitoly:

- Definícia primitívnej funkcie
- Definícia neurčitého integrálu
- Vety o neurčitých integráloch
- *Newtonova-Leibnizova formula určitého integrálu*
- Geometrické aplikácie určitého integrálu

Vznik integrálneho počtu je spojený s menami I. Newtona a G. W. Leibniza i s pojmom kvadratúra (výpočet obsahu). Pojem kvadratúra sa vyvíjal viac ako 2 000 rokov a jeho vývin sa vlastne dodnes neukončil. Integrálny počet má široké uplatnenie v prírodných a technických vedách. Používame ho napríklad pri výpočtoch obsahov rovinných útvarov, objemov rotačných telies, pri určení dráhy rovnomerného pohybu, pri výpočte práce...

Pr. 1

Urči závislosť dráhy od času t pre teleso pohybujúce sa rýchlosťou $v(t)=t^2+t-1$.

$s'(t)=v(t)=t^2+t-1$

Hľadáme takú funkciu s, ktorej deriváciou bude v.

$\left(t^3\right)'=3t^2 \Rightarrow \left(at^3\right)'=t^2 \Rightarrow 3a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$

$\left(t^2\right)'=2t \Rightarrow \left(bt^2\right)'=t \Rightarrow 2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$

$t'=1$

$s(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t$

Použité pravidlo o derivácii súčtu funkcií.

Skúška: $s'(t)=\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3t^2+\frac{1}{2}\cdot 2t-t^0=t^2+t-1=v(t)$

Závislosť dráhy od času t pre teleso pohybujúce sa rýchlosťou $v(t)=t^2+t-1$ je $s(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t$.

Definícia primitívnej funkcie

Primitívnou funkciou k funkcii $f(x)$ na intervale I nazývame každú funkciu $F(x)$, pre ktorú $F'(x)=f(x)$ pre všetky $x\in$ I.

Pr. 2

Zisti, či funkcia: **a)** $f(x)=\frac{x^3}{3}$, **b)** $g(x)=\frac{x^3}{3}-17$ je primitívnou funkciou k funkcii $h(x)=x^2$.

a) $f'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2=x^2=h(x)$

b) $g'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-17\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2-0=x^2=h(x)$

Ak f, g sú primitívne funkcie na intervale I k tej istej funkcii h, tak f, g sa líšia o konštantu (derivácia konštanty je nula), teda $f(x)=g(x)+c$.

Funkcie f, g sú primitívne funkcie k funkcii h.

Pr. 3

Urči krivku, ktorá prechádza bodom [−4, 5] a ktorej dotyčnica v jej ľubovoľnom bode $[x, y]$ má smernicu $k=2x+4$.

$f'(x)=2x+4 \Rightarrow f(x)=x^2+4x \Rightarrow$

$\Rightarrow f(-4)=(-4)^2+4\cdot(-4)=0\neq 5$

Našli sme krivku, ktorej deriváciou je funkcia $y=2x+4$, no táto krivka neprechádza bodom [−4, 5].

$f(x)=x^2+4x+c \Rightarrow 5=(-4)^2+4\cdot(-4)+c \Rightarrow c=5$

Primitívne funkcie sa líšia o konštantu.

Hľadaná krivka má rovnicu $y=x^2+4x+5$.

Definícia neurčitého integrálu

Množinu všetkých primitívnych funkcií k funkcii $f(x)$ označujeme $\int f(x)dx$ a nazývame neurčitým integrálom funkcie $f(x)$.

Neurčitý integrál niektorých elementárnych funkcií:

funkcia $f(x)$	$\int f(x)dx$
$f(x)=k$, k je konštanta	$kx+c$
$f(x)=x^n$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$
$f(x)=\sin x$	$-\cos x+c$
$f(x)=\cos x$	$\sin x+c$
$y=e^x$	e^x+c

Vety o neurčitých integráloch

Ak $\int f(x)dx=F$, $\int g(x)dx=G$, $a\in \mathrm{R}$, tak:

a) $\int a\cdot f(x)dx=a\cdot F+c$ (integrál zo súčinu konštanty a funkcie),

b) $\int (f(x)+g(x))dx=F+G+c$ (integrál zo súčtu funkcií),

c) $\int (f(x)-g(x))dx=F-G+c$ (integrál z rozdielu funkcií).

Pr. 4

Vypočítaj $\int\left(x^3-5x^2+6x-3\right)dx$.

$$\int\left(x^3-5x^2+6x-3\right)dx=\int x^3dx-5\int x^2dx+6\int xdx-\int 3dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}-5\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}-3x+c=\frac{x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}+3x^2-3x+c$$

Newtonova-Leibnizova formula určitého integrálu

Ak $\int f(x)dx=F(x)+c$, tak určitým integrálom (od a do b) nazývame číslo $F(b)-F(a)$.

Zapisujeme: $\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$.

Newtonova - Leibnizova formula patrí dodnes medzi bežný arzenál študentov stredných a vysokých škôl. Menej je však známe, že túto formulu neobjavil ani Newton, ani Leibniz, ale I. Barrow, učiteľ I. Newtona.

Pr. 5

Vypočítaj $\int_0^{\pi}\sin x\,dx$.

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=-\cos\pi-(-\cos 0)=-(-1)-(-1)=2$$

Pr. 6

Vypočítaj $\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx$

$$\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}=-\cos 2\pi-(-\cos\pi)=-1-\left[-(-1)\right]=-2$$

Pr. 7

Vypočítaj $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx$

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0$$

Geometrické aplikácie určitého integrálu

Výpočet obsahu plochy pomocou integrálu

Obsah S útvaru ohraničeného priamkami $x = a$, $x = b$, osou x a grafom (spojitej) funkcie $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ je $F(b) - F(a)$, kde F je ľubovoľná primitívna funkcia k funkcii f, pričom však $f(x) \geq 0$, resp. $f(x) \leq 0$ pre všetky $x \in \langle a, b \rangle$.

Zapisujeme: $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

V pr. 5 sme teda vypočítali obsah útvaru ohraničeného priamkami $x = 0$, $x = \pi$, osou x a grafom funkcie $y = \sin x$, $S = 2$ (jednotky obsahu).

V pr. 6 sme vypočítali obsah útvaru ohraničeného priamkami $x = \pi$, $x = 2\pi$, osou x a grafom funkcie $y = \sin x$, $S = 2$ (jednotky obsahu).

V pr. 7 sme však nevypočítali obsah útvaru ohraničeného priamkami $x = 0$, $x = 2\pi$, osou x a grafom funkcie $y = \sin x$, pretože funkcia na tomto intervale nadobúda kladné aj záporné hodnoty.

Pr. 8

Vypočítaj obsah útvaru ohraničeného priamkami $x = -2$, $x = -1$, osou x a grafom funkcie $y = x^3$.

$$\int_{-2}^{-1} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^{-1} = \frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = -\frac{15}{4} \Rightarrow S = \frac{15}{4}$$

Útvar ohraničený priamkami $x = -2$, $x = -1$, osou x a grafom funkcie $y = x^3$ má obsah $\frac{15}{4}$.

Obsah útvaru ohraničeného grafmi funkcií (spojitých) $y = f(x)$ a $y = g(x)$ môžeme vypočítať podľa vzorca $S = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$, kde a, b sú x-ové súradnice ich priesečníkov.

Pr. 9

Vypočítaj obsah útvaru ohraničeného grafmi funkcie $f(x) = x^2 - 2x$ a $g(x) = 4x - x^2$.

$$f(x) - g(x) = x^2 - 2x - (4x - x^2) = 2x^2 - 6x$$

$$2x^2 - 6x = 2x(x - 3) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$$

Priesečníky grafov daných funkcií.

$$\int_0^3 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^3 2(x^2 - 3x) dx = 2\left[\frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = 2 \cdot \left(\frac{27}{3} - 3 \cdot \frac{9}{2} \right) = 2 \cdot \frac{27 \cdot 2 - 3 \cdot 9 \cdot 3}{6} = -9$$

Útvar ohraničený grafmi funkcie $f(x)$ a $g(x)$ má obsah 9.

Výpočet objemu rotačného telesa

Ak A je rotačné teleso utvorené rotáciou krivky $y = f(x)$ okolo x-ovej osi, pričom f je nezáporná funkcia spojitá v každom bode intervalu $\langle a, b\rangle$, tak jeho objem $V(A) = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

Pr. 10

Odvoď vzorec na výpočet objemu gule.

$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2$ — Rovnica kružnice so stredom $S[0, 0]$ a polomerom r. Kružnica nie je grafom funkcie!

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ — Rovnica polkružnice ležiacej nad osou x.

$V(G) = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)dx =$ — Stačí otáčať aj štvrťkružnicu, dostaneme tak polguľu.

$$= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Objem V gule s polomerom r je $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Pr. 11

Vypočítaj objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou elipsy ($a = 5$, $b = 3$) okolo jej vedľajšej osi.

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow y^2 = 25 - \frac{25x^2}{9} \Rightarrow y = \pm\sqrt{25 - \frac{25x^2}{9}}$ — Rovnica elipsy so stredom $S[0, 0]$, pričom jej hlavnou osou je os y.

$V(E) = 2\pi \int_0^3 \left(25 - \frac{25x^2}{9} \right) dx = 2\pi \left[25x - \frac{25x^3}{9 \cdot 3} \right]_0^3 =$ — Stačí otáčať štvrťelipsu a výsledok vynásobiť 2.

$$= 2\pi \left(25 \cdot 3 - \frac{25 \cdot 3^3}{9 \cdot 3} \right) = 2\pi \cdot 25 \cdot 2 = 100\pi$$

Daný elipsoid má objem 100π (jednotiek objemu).

Toto teleso nazývame rotačný elipsoid.

Pr. 12

Vypočítaj objem telesa, ktoré vznikne otáčaním útvaru ohraničeného krivkami $y = x^2$ a $y = x$.

$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$ — Spoločné body kriviek.

$V(T_1) = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$ — Objem 1. telesa.

$V(T_2) = \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$ — Objem 2. telesa.

$V(T_2) - V(T_1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{15}$ — Hľadaný objem je rozdiel objemov.

Objem telesa, ktoré vznikne otáčaním útvaru ohraničeného krivkami $y = x^2$ a $y = x$, je $\frac{2\pi}{15}$ (jednotiek objemu).

Register

R

S, Š

T, Ť

Zmaturuj!

z matematiky

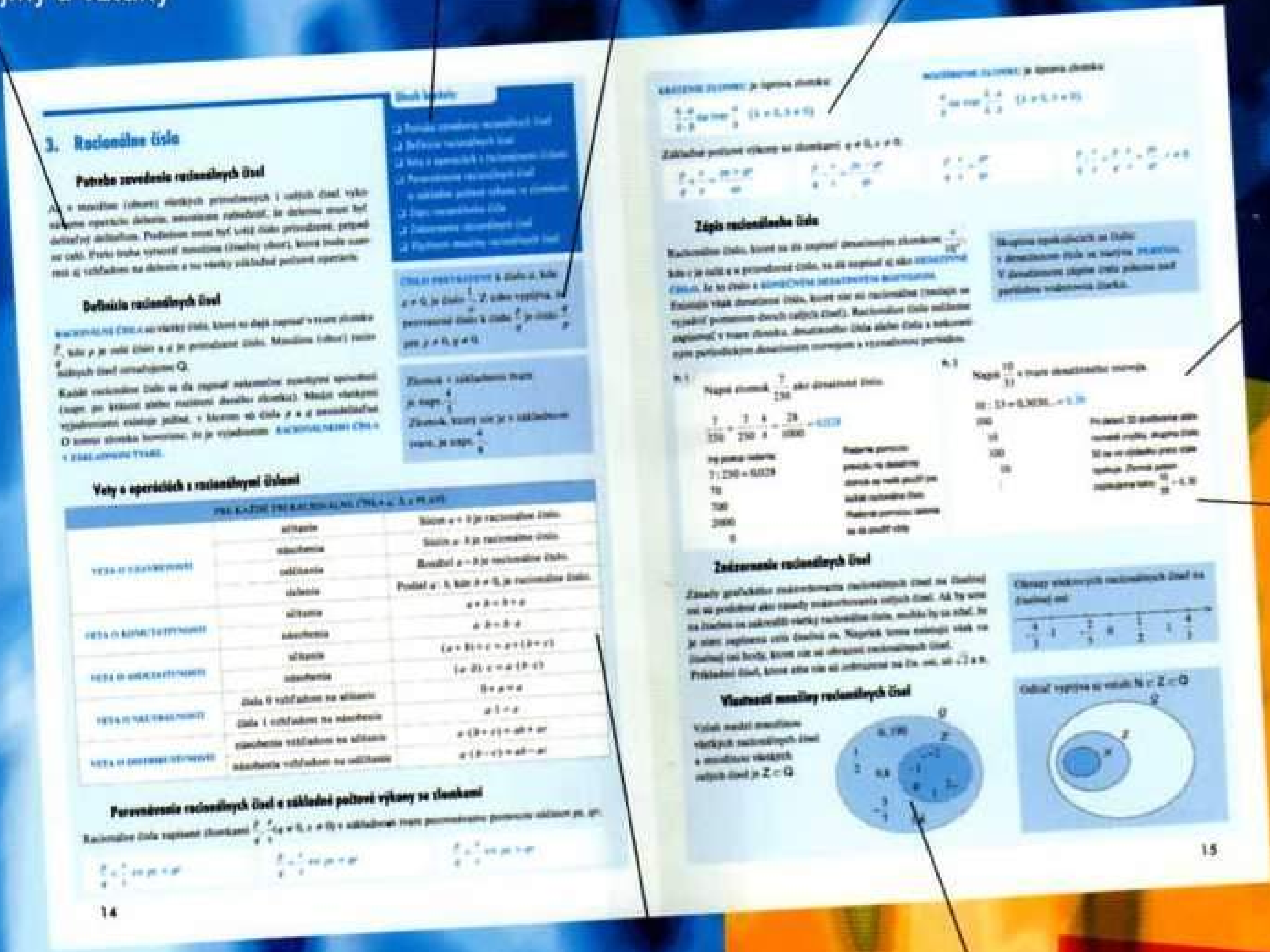
Ľahkému porozumeniu a zapamätaniu textu napomáha prehľadné a netradičné grafické spracovanie publikácie:

základný text vysvetľujúci pojmy a vzťahy

obsah kapitoly

poznámky a príklady

dôležité vzťahy určené na zapamätanie



riešené príklady

popisy k riešeniam príkladov

učivo prehľadne spracované do tabuľky

názorné obrázky

V edícii Zmaturuj vychádza i titul Zmaturuj z literatúry. Pripravujeme publikácie z chémie, fyziky, biológie, slovenského jazyka a z náuky o spoločnosti.

ISBN 80-89160-01-8