ŠTÁTNY PEDAGOGICKÝ ÚSTAV

CIEĽOVÉ POŽIADAVKY NA VEDOMOSTI A ZRUČNOSTI MATURANTOV Z MATEMATIKY

BRATISLAVA 2012

Schválilo Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky dňa 30. 8. 2013
pod číslom 2013-10834/28677:1-0922 s platnosťou od 1. 9. 2013.

ÚVOD

Cieľové požiadavky z matematiky sú rozdelené na časti *Obsah* a *Požiadavky na vedomosti a zručnosti.*

Text v jednotlivých častiach vytlačený *obyčajnou kurzívou* predstavuje odvolávky, vysvetlivky a komentáre.

V každej kapitole sú v odseku *Obsah* (rozdelenom spravidla na 2 menšie časti s názvami *Pojmy* a *Vlastnosti a vzťahy*) vymenované termíny a vzťahy (vzorce, postupy, tvrdenia), ktoré má žiak ovládať. Toto ovládanie v prípade *pojmov* znamená, že žiak

- rozumie zadaniam úloh, v ktorých sa tieto pojmy vyskytujú,
- vie ich správne použiť pri formuláciách svojich odpovedí,
- vie ich stručne opísať (definovať).

V prípade *vlastností a vzťahov* ovládaním rozumieme žiakovu schopnosť vybaviť si tieto vzťahy v mysli (bez toho, aby mu bolo potrebné pripomínať konkrétnu podobu uvedeného vzťahu, postupu, či tvrdenia) a použiť ich pri riešení danej úlohy (pričom spôsob tohto použitia špecifikuje časť *Požiadavky na vedomosti a zručnosti*, o ktorej hovoríme nižšie). Kvôli prehľadnosti neuvádzame úplné znenie jednotlivých vzťahov so všetkými predpokladmi a podmienkami, ale len takú ich podobu, z ktorej je jasné, aké tvrdenie máme na mysli.

Pokiaľ sa v zadaniach úloh alebo otázok, ktoré má žiak riešiť alebo zodpovedať, vyskytnú pojmy, ktoré nie sú uvedené v časti *Obsah*, bude potrebné ich v texte zadania vysvetliť. Rovnako tak v prípade, že zadanie vyžaduje použitie postupu alebo vzťahu, ktorý nie je zahrnutý do časti *Obsah*, musí byť žiakovi k dispozícii opis požadovaného postupu alebo vzťahu (tento opis však nemusí byť súčasťou zadania, môže byť napríklad uvedený v zozname vzorcov a vzťahov, ktorý bude priložený k celému súboru zadaní). Výnimku z tohto pravidla predstavuje situácia, keď riešením úlohy má byť *objavenie* alebo *odvodenie* takého vzťahu, ktorý nebol uvedený v odseku *Vlastnosti a vzťahy*.

Časť *Požiadavky na vedomosti a zručnosti* opisuje v každej kapitole činnosti, ktoré má byť žiak schopný správne realizovať. V texte používanú formuláciu *„žiak vie...“* pritom chápeme v zmysle *„žiak má vedieť...“*; podobne formulácia *„... pokiaľ (ak) žiak vie...“* znamená *„... ak je v týchto cieľových požiadavkách uvedené, že žiak má vedieť...“*. Teda napríklad text *„žiak vie nájsť všetky riešenia nerovnice $f(x) \le a$, pokiaľ vie riešiť rovnicu $f(x) = a$ a súčasne vie načrtnúť graf funkcie f“* (ktorý čitateľ nájde v kapitole 1.4) treba chápať tak, že na inom mieste týchto cieľových požiadaviek je špecifikované, grafy ktorých funkcií f má žiak vedieť načrtnúť, a pre ktoré funkcie f má žiak vedieť riešiť rovnicu $f(x) = a$. Podobnú úlohu plní odvolávka *„pozri...“*; napríklad v texte *„žiak vie nájsť definičný obor danej funkcie (pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)“* táto odvolávka upozorňuje, že stupeň náročnosti, na ktorom má žiak zvládnuť určovanie definičného oboru funkcie, je daný náročnosťou rovníc a nerovníc, ktoré pri tom musí vyriešiť, pričom táto náročnosť je opísaná v časti 1.4. Odvolávka *„pozri tiež...“* upozorňuje čitateľa, že uvedený pojem alebo činnosť sa vyskytuje aj na inom mieste tohto textu.

Žiak by mal byť schopný riešiť *úlohy komplexného charakteru*, teda úlohy, ktorých riešenie vyžaduje spojenie *neveľkého počtu* činností opísaných v týchto cieľových požiadavkách (pritom nevylučujeme spájanie činností opísaných v rôznych kapitolách); napr. pri riešení slovnej úlohy by mal žiak zvládnuť formuláciu príslušného problému v reči matematiky, jeho vyriešenie prístupnými matematickými prostriedkami a formuláciu odpovede opäť v reči pôvodného slovného zadania. Jednotlivé činnosti uvedené v časti *Požiadavky na vedomosti a zručnosti* predstavujú len jednu činnosť, pričom riešenie jedného konkrétneho zadania môže vyžadovať i použitie a spojenie viacerých takýchto činností.

V snahe o ucelenosť jednotlivých kapitol uvádzame tie pojmy a zručnosti, ktoré súvisia s viacerými kapitolami, v každej z nich. Z toho istého dôvodu sú do textu zaradené i niektoré pojmy, vzťahy a činnosti, ktoré sú obsahom učiva základnej školy.

Vyznačené (zvýraznené) učivo sa v prechodnom období 2012 – 2016 nebude testovať v externej časti maturitnej skúšky.

1 ZÁKLADY MATEMATIKY

1.1 Logika a množiny

Obsah

Pojmy:
výrok, axióma, definícia, hypotéza, tvrdenie, pravdivostná hodnota, logické spojky, negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, obmena implikácie, obrátená implikácia, ekvivalencia, vyplýva, je ekvivalentné, kvantifikátor (existenčný, všeobecný, aspoň, najviac, práve), priamy a nepriamy dôkaz, dôkaz sporom, množina, prvky množiny, podmnožina, nadmnožina, prienik, zjednotenie a rozdiel množín, Vennove diagramy, disjunktné množiny, prázdna množina, doplnok množiny, konečná a nekonečná množina, počet prvkov množiny.

Vlastnosti a vzťahy:

- Implikácia (výrok) $A \Rightarrow B$ je ekvivalentná s implikáciou (výrokom) $B' \Rightarrow A'$ (výrok z *A* vyplýva *B* platí práve vtedy, keď platí výrok z negácie *B* vyplýva negácia *A*),
- výroky *A*, *B* sú ekvivalentné, ak platia obe implikácie $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$,
- negácia konjunkcie (disjunkcie) je disjunkcia (konjunkcia) negácií,
- implikácia $A \Rightarrow B$ je nepravdivá práve vtedy, keď je pravdivý výrok *A* a nepravdivý výrok *B*,
- pravdivosť zložených výrokov a negácie (*„tabuľka pravdivostných hodnôt“),*
- negácia výroku $\forall x \in M$ *platí V(x)* je $\exists x \in M$, *pre ktoré neplatí V(x),*
- negácia výroku $\exists x \in M$, *pre ktoré platí V(x)* je $\forall x \in M$ *neplatí V(x),*
- $A = B$ práve vtedy, keď súčasne platí $A \subset B, B \subset A$,
- pre počty prvkov zjednotenia dvoch množín platí $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- rozlíšiť používanie logických spojok a kvantifikátorov vo vyjadrovaní sa v bežnom živote na jednej strane a v rovine zákonov, nariadení, zmlúv, návodov, matematiky na strane druhej,
- zistiť pravdivostnú hodnotu zloženého výroku (vytvoreného pomocou negácie, konjunkcie, disjunkcie, implikácie, ekvivalencie) z pravdivostných hodnôt jednotlivých zložiek *(teda napísať pre danú situáciu príslušný riadok „tabuľky pravdivostných hodnôt“),*
- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť, či je výrok negáciou daného výroku, vytvoriť negáciu zloženého výroku (nie len pomocou *„nie je pravda, že...“*),
- v jednoduchých prípadoch zapísať a určiť množinu vymenovaním jej prvkov, charakteristickou vlastnosťou alebo množinovými operáciami,
- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť o konečnosti či nekonečnosti danej množiny,
- opísať základné druhy dôkazov (priamy, nepriamy, sporom) a dokumentovať ich príkladmi,
- použiť základné druhy dôkazov pri dokazovaní jednoduchých tvrdení,
- určiť zjednotenie, prienik a rozdiel množín i doplnok množiny *A* (ak *A* je podmnožinou *B*) vzhľadom na množinu *B (intervaly pozri v 1.2 Čísla, premenné a výrazy),*
- použiť vzťah pre počet prvkov zjednotenia dvoch množín pri hľadaní počtu prvkov týchto množín, resp. ich prieniku alebo zjednotenia,

- pri riešení úloh o množinách použiť ako pomôcku Vennove diagramy (pre 2 – 4 množiny).

1.2 Čísla, premenné a výrazy

Obsah

Pojmy:

konštanta, premenná, výraz, obor definície výrazu, rovnosť výrazov, hodnota výrazu, mnohočlen, stupeň mnohočlena, doplnenie do štvorca *(pre kvadratický mnohočlen)*, člen mnohočlena, vynímanie pred zátvorku, úprava na súčin, krátenie výrazu, prirodzené *(N)*, celé (*Z*), nezáporné (*N₀*), záporné (Z^-), racionálne *(Q)*, iracionálne (*I*), reálne *(R)* čísla, *n*-ciferné číslo, zlomky (čitateľ, menovateľ, spoločný menovateľ, základný tvar zlomku, zložený zlomok, hlavná zlomková čiara), desatinný rozvoj (konečný, nekonečný a periodický), číslo π, nekonečno, číselná os, znázorňovanie čísel, komutatívny, asociatívny a distributívny zákon, odmocnina (druhá), *n*-tá odmocnina, mocnina (s prirodzeným, celočíselným, racionálnym exponentom), exponent a základ mocniny, základ logaritmu, absolútna hodnota čísla, úmera (priama a nepriama), pomer, percento, promile, základ *(pre počítanie s percentami)*, faktoriál, kombinačné číslo, desiatková sústava, dekadický zápis, interval (uzavretý, otvorený, ohraničený, neohraničený).

Vlastnosti a vzťahy:

- $x^2 - y^2 = (x-y)\cdot(x+y)$, $x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$, $ax^2 + bx + c = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, kde x_1, x_2 sú korene rovnice $ax^2+bx+c=0, (a \neq 0)$,
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$, $(ab)^x = a^x \cdot b^x$, $c^0 = 1$, $a, b \geq 0, c > 0, x, y \in Z$, Q,
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m\cdot n]{x}$, $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$, $\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$, pre $x, y \geq 0, m, n \in N$,
- $\sqrt{a^2} = |a|$,
- $|x-a|$ je vzdialenosť obrazov čísel *x* a *a* na číselnej osi,
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$,
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$, $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$,
  $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$,
  $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,
- $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$, $a^{\log_a x} = x$, pre $a > 0, a \neq 1, x > 0$, $b > 0$,
- $\log_a x + \log_a y = \log_a(x\cdot y)$, $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$, pre $a > 0, a \neq 1, x, y > 0$,
- $\log_a(x^y) = y\cdot\log_a x$, pre $a > 0, a \neq 1, x > 0$,
- $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$, pre prirodzené čísla *n*, 0!=1,
- $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, pre prirodzené čísla *n* a nezáporné celé čísla *k*, nie väčšie ako *n*,
- práve racionálne čísla majú desatinný periodický rozvoj,
- $R = Q \cup I$, $Q \cap I = \{\ \}$, $Z = N \cup Z^- \cup \{0\}$, $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

(čísla)

- zaokrúhľovať čísla,
- upraviť reálne číslo na tvar $\pm a \cdot 10^n$, kde n je celé číslo a a číslo z intervalu $\langle 1, 10)$,
- vypočítať absolútnu hodnotu reálneho čísla,
- zapísať vzdialenosť bodov na číselnej osi pomocou absolútnej hodnoty,
- znázorňovať čísla na číselnej osi, porovnávať čísla na číselnej osi, odčítať čísla z číselnej osi,
- pre konkrétne n všeobecne zapísať n-ciferné číslo,
- na približný výpočet číselných výrazov a hodnôt funkcií (vrátane $\log_a x$) používať kalkulačku, pričom vie
  - upravovať číselné výrazy na tvar vhodný pre výpočet na kalkulačke,
  - zvoliť vhodný postup, aby mu vyšiel čo najpresnejší výsledok *(napr. pri približnom výpočte* $\frac{20!}{10! \cdot 10!}$*)*,
- pomocou kalkulačky zistiť ostrý uhol, ktorý má danú goniometrickú hodnotu,
- porovnať dve reálne čísla na úrovni presnosti kalkulačky,
- vyjadriť zjednotenie, prienik a rozdiel konečného počtu intervalov pomocou najmenšieho počtu navzájom disjunktných intervalov, jednoprvkových množín a prázdnej množiny,

(výrazy)

- určiť hodnotu výrazu *(dosadiť)* bez použitia kalkulačky alebo pomocou kalkulačky,
- určiť obor definície výrazu *(pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*,
- odstrániť absolútnu hodnotu rozlišovaním vhodných prípadov *(t.j.* $|V(x)| = V(x)$ *pre x, pre ktoré* $V(x) \geq 0$ *a* $|V(x)| = -V(x)$ *pre x, pre ktoré* $V(x) \leq 0$*)*,
- doplniť kvadratický trojčlen do štvorca *(pozri tiež 2.2 Lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť)*,
- upravovať mnohočlen na súčin vynímaním pred zátvorku a použitím vzťahov pre rozklady výrazov $x^2 - y^2$, $x^2 \pm 2xy + y^2$, $ax^2 + bx + c$,
- použiť pri úpravách výrazov (číselných alebo výrazov s premennými) rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy*, roznásobovanie, vynímanie pred zátvorku, krátenie, úpravu zloženého zlomku na jednoduchý,

(práca s premennou)

- používať percentá a úmeru,
- nahradiť premennú vo výraze novým výrazom *(substitúcia, pozri tiež 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*,
- pri priamo závislých veličinách vie vyjadriť jednu pomocou druhej *(pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti)*,
- vyjadriť neznámu zo vzorca *(pozri 2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti)*,
- zapísať slovný text algebraicky *(matematizácia)*,
  - zapísať vzťahy (v jednoduchom texte) pomocou premenných, čísel, rovností a nerovností,
  - zapísať, vyjadriť bežné závislosti v geometrii,
  - v jednoduchých prípadoch odvodiť zo známych vzťahov niektoré nové vzťahy,
- riešiť kontextové *(slovné)* úlohy vedúce k rovniciam a nerovniciam *(pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)* a interpretovať získané riešenia v jazyku pôvodného zadania.

1.3 Teória čísel

Obsah

Pojmy:

deliteľ, násobok, deliteľnosť, najväčší spoločný deliteľ (NSD), najmenší spoločný násobok (NSN), prvočíslo, zložené číslo, súdeliteľné a nesúdeliteľné čísla, zvyšok, prvočíselný rozklad, prvočiniteľ.

Vlastnosti a vzťahy:

- Znaky deliteľnosti číslom 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- zistiť bez delenia, či je dané číslo deliteľné niektorým z čísel uvedených vo vlastnostiach a vzťahoch,
- sformulovať a použiť kritériá deliteľnosti niektorými zloženými číslami, ktoré sú súčinom nesúdeliteľných čísel uvedených vo vlastnostiach a vzťahoch *(napr. 6, 12, 15),*
- nájsť NSN, NSD daných čísel,
- nájsť celočíselné riešenia úloh, v ktorých možno jednoduchou úvahou určiť vhodnú konečnú množinu, ktorá hľadané riešenia musí obsahovať *(riešenia úlohy potom nájde preverením jednotlivých prvkov získanej konečnej množiny),*
- pri riešení jednoduchých úloh využiť pravidelnosť rozloženia násobkov celých čísel na číselnej osi.

1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy

Obsah

Pojmy:

rovnica, nerovnica, sústava rovníc, sústava nerovníc a ich riešenie, koeficient, koreň, koreňový činiteľ, diskriminant, doplnenie do štvorca, úprava na súčin, substitúcia, kontrola (skúška) riešenia, (ekvivalentné a neekvivalentné) úpravy rovnice a nerovnice, lineárny, kvadratický člen, koeficient pri lineárnom (kvadratickom) člene.

Vlastnosti a vzťahy:

- Diskriminant kvadratickej rovnice $ax^2+bx+c=0$ je $D=b^2-4ac$,
- riešením kvadratickej rovnice $ax^2+bx+c=0$ sú $x_{1,\,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$,
- vzťah medzi diskriminantom a počtom (navzájom rôznych) koreňov kvadratickej rovnice,
- $ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, kde x_1, x_2 sú korene rovnice $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$,
- vzťah medzi znamienkom súčinu dvoch výrazov a znamienkom jednotlivých činiteľov.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:
(rovnice)

- nájsť všetky riešenia lineárnej rovnice $ax+b=0$ a kvadratickej rovnice $ax^2+bx+c=0$, pričom pozná vzťah medzi koreňmi kvadratickej rovnice a koreňovými činiteľmi, počtom riešení,
- nájsť všetky riešenia, resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale I (ak sa nedá presne, tak približne s pomocou kalkulačky) rovnice $f(x)=A$, kde $A\in R$ a f je funkcia
  - $x^a, b^x, \log_b x$ ($a\in Q, b$ je kladné číslo rôzne od 1),

- $|x-a|$,
- $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$,

a vie určiť, koľko riešení má uvedená rovnica (v závislosti od čísla *A*, čísel *a*, *b*, *c*, resp. intervalu *I*)

- použitím danej substitúcie $y=\varphi(x)$ upraviť rovnicu zapísanú v tvare $f(\varphi(x))=A$ na tvar $f(y)=A$, špeciálne vie nájsť všetky riešenia (resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale *I*) rovníc
  - $f(ax+b)=A$, kde f je funkcia x^a, b^x, $\log_b x$, $\sin x$, $\cos x$,
  - $f(ax^2+bx+c)=A$, kde f je funkcia x^a, b^x, $\log_b x$,
- nájsť všetky riešenia (resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale *I*) rovníc zapísaných v tvare $f(x)g(x)=0$, pokiaľ vie riešiť rovnice $f(x)=0$, $g(x)=0$,
- nájsť všetky riešenia (resp. všetky riešenia ležiace v danom intervale *I*) rovníc, ktorých tvar možno upraviť na niektorý z predchádzajúcich tvarov
  - použitím úprav jednotlivých strán rovnice, využívajúcich úpravy výrazov a základné vlastnosti funkcií *(pozri 1.2 Čísla, premenné a výrazy, 2 Funkcie)*,
  - pripočítaním (špeciálne odpočítaním) a vynásobením (špeciálne vydelením) obidvoch strán rovnice výrazom, umocnením (špeciálne odmocnením) obidvoch strán rovnice,
  - odstránením absolútnej hodnoty v prípade rovníc s jednou absolútnou hodnotou *(rozlišovaním dvoch vhodných prípadov)*,

  pričom vie rozhodnúť
  - či použitá úprava zachová alebo či môže zmeniť množinu riešení danej rovnice,
  - ktoré z koreňov rovnice, ktorá vznikla uvedenými úpravami, sú aj koreňmi pôvodnej rovnice, resp. pri použití postupov, ktoré mohli množinu potenciálnych koreňov zmenšiť, o ktorých číslach ešte treba zistiť, či sú koreňmi pôvodnej rovnice,
- riešiť kontextové *(slovné)* úlohy vedúce k rovniciam a interpretovať získané riešenia v jazyku pôvodného zadania,

(sústavy rovníc)

- opísať a geometricky interpretovať množinu všetkých riešení jednej a dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi *(pozri 3.2 Analytická geometria v rovine, 4.2 Súradnicová sústava v priestore)*,
- nájsť všetky riešenia sústavy 2 rovníc s 2 neznámymi, ktorú možno jednoducho upraviť na tvar $y=f(x)\wedge g(x,y)=0$ (resp. $x=f(y)\wedge g(x,y)=0$), pokiaľ vie riešiť rovnicu $g(x,f(x))=0$ (resp. $g(f(y),y)=0$),
- upravovať sústavy rovníc použitím
  - úprav jednotlivých strán rovnice, využívajúcich úpravy výrazov a základné vlastnosti elementárnych funkcií *(pozri 1.2 Čísla, premenné a výrazy, 2 Funkcie)*,
  - pripočítania (špeciálne odpočítania) a vynásobenia (špeciálne vydelenia) obidvoch strán rovnice výrazom,

  pričom vie rozhodnúť,
  - či použitá úprava zachová alebo či môže zmeniť množinu riešení danej sústavy,
  - ktoré z riešení sústavy, ktorá vznikla uvedenými úpravami, sú aj riešeniami pôvodnej sústavy, resp. pri použití postupov, ktoré mohli množinu potenciálnych riešení zmenšiť, o ktorých číslach ešte treba zistiť, či sú riešeniami pôvodnej sústavy,

(nerovnice a ich sústavy)

- nájsť množinu všetkých riešení nerovnice
  - $f(x)*L$, kde L je reálne číslo, $*$ je jeden zo znakov nerovnosti $<, \leq, \geq, >$, f je niektorá z funkcií $(ax+b)^\alpha$, b^x, $\log_b x$, $|x-a|$, resp. množinu všetkých riešení tejto nerovnice ležiacich v danom intervale,
  - $f(x)*L$, kde f je niektorá z funkcií $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a x je prvkom daného ohraničeného intervalu,

- $\frac{f(x)}{g(x)} * 0$ a $f(x)g(x) * 0$, pokiaľ vie riešiť nerovnice $f(x) * 0$, $g(x) * 0$, kde $*$ je znak nerovnosti,

- nájsť všetky riešenia nerovníc, ktorých riešenie možno postupmi uvedenými v nasledujúcej odrážke nahradiť riešením nerovníc uvedených v predchádzajúcej odrážke,
- pri riešení a úpravách nerovníc správne použiť
  - vynásobenie obidvoch strán nerovnice kladným alebo záporným číslom,
  - pripočítanie výrazu k obidvom stranám nerovnice,
- riešiť sústavu nerovníc s jednou neznámou v prípadoch, keď vie vyriešiť samostatne každú z daných nerovníc *(pozri prieniky a zjednotenia intervalov v 1.2 Čísla, premenné a výrazy)*,
- vyznačiť na x-ovej osi riešenie nerovnice $f(x)*g(x)$, pokiaľ vie načrtnúť grafy funkcií $y = f(x)$, $y = g(x)$,
- v rovine opísať a geometricky interpretovať množinu všetkých riešení jednej nerovnice s dvoma neznámymi x, y, ktorú možno zapísať v tvare
  - $y * f(x)$ alebo $x * f(y)$ (kde $*$ je znak nerovnosti) v tých prípadoch, kedy vie načrtnúť graf funkcie $y = f(x)$, resp. $x = f(y)$,
  - $ax + by + c * 0$,
- riešiť kontextové *(slovné)* úlohy vedúce k nerovniciam a interpretovať získané riešenia v jazyku pôvodného zadania.

2 FUNKCIE

2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti

Obsah

Pojmy:

premenná (veličina), „daná premenná je funkciou inej premennej“, funkcia, postupnosť, argument, funkčná hodnota, *(n-tý)* člen postupnosti, definičný obor a obor hodnôt funkcie, graf funkcie, rastúca, klesajúca, monotónna funkcia (postupnosť), maximum (minimum) funkcie (postupnosti), lokálne maximum a minimum funkcie, zhora (zdola) ohraničená funkcia (postupnosť), ohraničená funkcia (postupnosť), horné (dolné) ohraničenie, konštantná, prostá, párna a nepárna, inverzná, zložená, periodická funkcia, rekurentý vzťah, postupnosť daná rekurentne.

Vlastnosti a vzťahy:

- Rastúca (klesajúca) funkcia je prostá,
- k prostej funkcii existuje inverzná funkcia,
- graf inverznej funkcie f^{-1} je súmerný s grafom funkcie f podľa priamky $y = x$,
- $f(f^{-1}(x)) = x$,
- graf párnej funkcie f je súmerný podľa osi y,
- graf nepárnej funkcie f je súmerný podľa bodu [0, 0].

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť, či niektorá z dvoch daných premenných veličín je funkciou druhej z nich a túto závislosť vyjadriť, ak je to možné urobiť pomocou predpisov funkcií, ktoré pozná,

- z daného grafu funkcie (postupnosti)
  - určiť približne
    - jej extrémy,
    - intervaly, na ktorých rastie (klesá),
  - zistiť, či je zdola (zhora) ohraničená, párna, nepárna,
- nájsť definičný obor danej funkcie, resp. rozhodnúť, či dané číslo patrí do definičného oboru danej funkcie *(pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*,
- rozhodnúť, či dané číslo patrí do oboru hodnôt danej funkcie *(pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*,
- nájsť funkčnú hodnotu funkcie v danom bode, určiť priesečníky jej grafu so súradnicovými osami, nájsť priesečníky grafov dvoch funkcií *(pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*,
- v prípade konštantnej funkcie a funkcií $ax+b$, ax^2+bx+c, $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, x^a, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$
  - určiť na danom intervale ich obor hodnôt,
  - určiť intervaly, na ktorých sú tieto funkcie rastúce, resp. klesajúce,
  - načrtnúť ich grafy,
  - nájsť ich najväčšie, resp. najmenšie hodnoty na danom intervale $\langle a, b\rangle$,
  - rozhodnúť, ktoré z nich sú na danom intervale I
    - prosté,
    - zhora (zdola) ohraničené,
    - párne, nepárne,
- načrtnúť grafy funkcií
  - $|ax+b|$,
  - $a+f(x)$, $f(a+x)$, $-f(x)$, $|f(x)|$, $a\cdot f(x)$, ak pozná graf funkcie f a opísať, ako vznikne uvedený graf z grafu funkcie *f*,
- načrtnúť graf inverznej funkcie f^{-1}, ak pozná graf prostej funkcie *f*,
- nájsť inverzné funkcie k funkciám $ax+b$, $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, x^a, a^x, $\log_a x$,
- v jednoduchých prípadoch rozhodnúť o existencii riešenia rovnice $f(x)=0$ (resp. $f(x)=a$), pokiaľ vie načrtnúť graf funkcie *f*,
- graficky znázorniť na číselnej osi množinu riešení nerovnice $f(x)*a$, kde $*$ je jeden zo symbolov $<, \leq, \geq, >$, pokiaľ vie načrtnúť graf funkcie *f*,
- nájsť všetky riešenia nerovnice $f(x)*a$, pokiaľ vie riešiť rovnicu $f(x)=a$ a súčasne vie načrtnúť graf funkcie *f*,
- vypočítať hodnotu daného člena postupnosti danej jednoduchým rekurentným vzťahom.

2.2 Lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť

Obsah

Pojmy:

lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť, smernica priamky, diferencia aritmetickej postupnosti, vrchol paraboly.

Vlastnosti a vzťahy:

- Grafom lineárnej (kvadratickej) funkcie je priamka (parabola),

- lineárna (kvadratická) funkcia je jednoznačne určená funkčnými hodnotami v 2 (3) bodoch,
- vzťah medzi koeficientom pri lineárnom člene a rastom, resp. klesaním lineárnej funkcie,
- vzťah medzi diferenciou aritmetickej postupnosti a jej rastom, resp. klesaním,
- kvadratická funkcia má na *R* jediný globálny extrém, minimum v prípade kladného koeficientu pri kvadratickom člene, maximum v opačnom prípade,
- parabola *(t.j. graf kvadratickej funkcie)* je súmerná podľa rovnobežky s osou *y*, prechádzajúcej vrcholom paraboly.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie: *(pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti)*

- riešiť lineárne a kvadratické rovnice a nerovnice *(pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*, špeciálne vie nájsť priesečníky grafov 2 lineárnych (resp. 2 kvadratických) funkcií alebo lineárnej a kvadratickej funkcie,
- nájsť predpis lineárnej (alebo konštantnej) funkcie, ak pozná
  - hodnoty v 2 bodoch,
  - hodnotu v 1 bode a smernicu grafu tejto funkcie,
- nájsť predpis kvadratickej funkcie, ak pozná
  - jej hodnoty v 3 vhodne zvolených bodoch,
  - vrchol jej grafu a hodnotu v ďalšom bode,
- nájsť intervaly, na ktorých je daná lineárna alebo kvadratická funkcia rastúca, resp. klesajúca,
- nájsť, pokiaľ existuje, najväčšiu a najmenšiu hodnotu kvadratickej a lineárnej funkcie na danom intervale, špeciálne vie nájsť vrchol grafu kvadratickej funkcie, ak pozná jej predpis,
- určiť hodnotu ľubovoľného člena aritmetickej postupnosti, ak pozná
  - jeden jej člen a diferenciu,
  - dva rôzne členy,
- pre aritmetickú postupnosť (danú explicitne) napísať zodpovedajúci rekurentný vzťah,
- nájsť súčet *n* (pre konkrétne *n*) za sebou nasledujúcich členov danej aritmetickej postupnosti.

2.3 Mnohočleny a mocninové funkcie, lineárna lomená funkcia

Obsah

Pojmy:

mocnina, mocnina s prirodzeným, celočíselným a racionálnym exponentom, *n*-tá odmocnina, polynóm, mnohočlen, mocninová funkcia, koeficient pri *n*-tej mocnine *(v polynomickej funkcii)*, exponent, lineárna lomená funkcia, asymptoty grafu lineárnej lomenej funkcie.

Vlastnosti a vzťahy:

- Polynóm stupňa *n* má najviac *n* rôznych reálnych koreňov,
- polynóm nepárneho stupňa má aspoň jeden reálny koreň,
- $x^{r+s} = x^r \cdot x^s$, $\left(x^r\right)^s = x^{rs}$, $\frac{1}{x^r} = x^{-r}$, $(xy)^r = x^r \cdot y^r$, $r, s \in Z, Q$,
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$, $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$, $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$, pre $x, y \geq 0, m, n \in N$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie: *(pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti)*

- použiť rovnosti z časti *Vlastnosti a vzťahy* pri úpravách výrazov *(pozri 1.2 Čísla, premenné a výrazy)*,

- riešiť rovnice a nerovnice s polynomickými, mocninovými a lineárnymi lomenými funkciami *(pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*,
- schematicky načrtnúť a porovnať grafy funkcií $y = x^n$ pre rôzne hodnoty $n \in Z$ na intervaloch $(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, \infty)$,
- nájsť rovnice asymptot grafu lineárnej lomenej funkcie a načrtnúť graf tejto funkcie,
- nájsť intervaly, na ktorých je lineárna lomená funkcia rastúca, resp. klesajúca a nájsť k nej inverznú funkciu.

2.4 Logaritmické a exponenciálne funkcie, geometrická postupnosť

Obsah

Pojmy:

exponenciálna a logaritmická funkcia, základ exponenciálnej a logaritmickej funkcie, logaritmus, dekadický logaritmus, číslo e a prirodzený logaritmus, geometrická postupnosť, kvocient geometrickej postupnosti.

Vlastnosti a vzťahy:

- $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$, $\left(a^r\right)^s = a^{rs}$, pre $a > 0, a \neq 1, r, s \in R$,
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$,
- $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$, pre $a > 0, a \neq 1, b > 0, x \in R$,
- $\log_a r + \log_a s = \log_a rs$, $\log_a r - \log_a s = \log_a \dfrac{r}{s}$, pre $a > 0, a \neq 1, r, s > 0$,
- $\log_a\left(r^s\right) = s \log_a r$, pre $a > 0, a \neq 1, r > 0, s \in R$,
- $a^{\log_a x} = x$, pre $a > 0, a \neq 1, x > 0$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie: *(pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti)*
(exponenciálna funkcia)

- použiť rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy* pri úprave výrazov *(pozri 1.2 Čísla, premenné a výrazy)*,
- riešiť exponenciálne rovnice a nerovnice *(pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*,
- rozhodnúť o raste, resp. klesaní funkcie a^x v závislosti od čísla a a vie načrtnúť graf tejto funkcie s vyznačením jeho význačných bodov (t.j. [0, 1], [1, a]),
- rozhodnúť o ohraničenosti zhora, resp. zdola funkcie a^x na danom intervale,
- vyjadriť n-tý člen geometrickej postupnosti (pre konkrétne n) pomocou jej prvého (alebo iného než n-tého) člena a kvocientu q,
- nájsť súčet n za sebou nasledujúcich členov geometrickej postupnosti (pre konkrétne n),
- rozhodnúť o raste, resp. klesaní geometrickej postupnosti v závislosti od jej prvého člena a kvocientu,

(logaritmická funkcia)

- použiť rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy* pri úpravách výrazov *(pozri 1.2 Čísla, premenné a výrazy)*,
- riešiť logaritmické rovnice a nerovnice *(pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*,
- rozhodnúť o raste, resp. klesaní funkcie $\log_a x$ v závislosti od čísla a a vie načrtnúť graf tejto funkcie s vyznačením jeho význačných bodov (t.j. [1, 0], [a, 1]),
- rozhodnúť o ohraničenosti zhora, resp. zdola logaritmickej funkcie na danom intervale,

- vyriešiť jednoduché príklady na výpočet úrokov.

2.5 Goniometrické funkcie

Obsah

Pojmy:

π, goniometrická funkcia, sínus, kosínus, tangens, (najmenšia) perióda, jednotková kružnica, oblúková miera, stupňová miera, uhol základnej veľkosti.

Vlastnosti a vzťahy:

- Hodnoty goniometrických funkcií pre uhly $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$,
- vzťahy pre sínus a kosínus dvojnásobného uhla:
  $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$,
- $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$,
  $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$,
  $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$,
- graf funkcie kosínus vznikne posunutím grafu funkcie sínus,
- periodickosť a najmenšie periódy jednotlivých goniometrických funkcií.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie: *(pozri tiež 2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti)*

- použiť rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy* pri úprave goniometrických výrazov *(pozri 1.2 Čísla, premenné a výrazy)*,
- nájsť pomocou kalkulačky riešenie rovnice $f(x) = a$, kde f je goniometrická funkcia, a to aj v prípade, že na kalkulačne niektoré goniometrické alebo inverzné goniometrické funkcie nie sú *(pozri tiež 1.2 Čísla, premenné a výrazy)*,
- riešiť goniometrické rovnice a nerovnice *(pozri 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*,
- vyjadriť hodnoty goniometrických funkcií pre uhly $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ako pomery strán pravouhlého trojuholníka,
- použiť goniometrické funkcie pri výpočte prvkov pravouhlého trojuholníka *(pozri tiež 3.1 Základné rovinné útvary)*,
- vyjadriť *(na základe znalosti súmerností a periodickosti grafov goniometrických funkcií)* $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ pre $\alpha \in R$ ako sínus, kosínus alebo tangens vhodného uhla $\beta \in \left\langle 0, \dfrac{\pi}{2}\right\rangle$,
- nájsť hodnoty všetkých goniometrických funkcií pre daný argument, ak pre tento argument pozná hodnotu aspoň jednej z nich,
- načrtnúť grafy funkcií $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, určiť hodnoty v bodoch $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, určiť najmenšie periódy týchto grafov,
- určiť podintervaly daného ohraničeného intervalu, na ktorých sú funkcie $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$ rastúce, resp. klesajúce,
- rozhodnúť o ohraničenosti funkcie tg x na danom intervale,
- načrtnúť grafy funkcií $k(f(x))$, $f(kx)$, $f(ax + b)$, $f(x) + a$, kde $k, a, b \in R$ a f je niektorá z goniometrických funkcií, určiť priesečníky grafov týchto funkcií s x-ovou osou a ich periódu

a v prípade $f(x) = \sin x$ alebo $f(x) = \cos x$ aj najmenšie a najväčšie hodnoty.

3 PLANIMETRIA

3. 1 Základné rovinné útvary

Obsah

Pojmy:

a) Lineárne útvary
bod, priamka, polpriamka, úsečka, stred úsečky, deliaci pomer, polrovina, rovnobežné a rôznobežné priamky, uhol (ostrý, pravý, priamy, tupý), susedné, vrcholové, súhlasné a striedavé uhly, os úsečky, os uhla, uhol dvoch priamok, kolmé priamky, kolmica, vzdialenosť (dvoch bodov, bodu od priamky, rovnobežných priamok).
b) Trojuholník
trojuholník (ostrouhlý, pravouhlý, tupouhlý, rovnoramenný a rovnostranný trojuholník), vrchol, strana *(ako vzdialenosť, ako úsečka)*, výška *(ako vzdialenosť, ako úsečka i ako priamka),* uhol, ťažnica, ťažisko, stredná priečka, kružnica trojuholníku opísaná, kružnica do trojuholníka vpísaná, obvod a plošný obsah trojuholníka, trojuholníková nerovnosť, Pytagorova veta, Euklidove vety, sínusová a kosínusová veta.
c) Kružnica a kruh
stred, polomer *(ako číslo i ako úsečka)*, priemer, tetiva, kružnicový oblúk, dotyčnica, sečnica a nesečnica, stredový a obvodový uhol, obvod kruhu a dĺžka kružnicového oblúka, kruhový výsek a odsek, medzikružie, obsah kruhu a kruhového výseku, spoločné (vonkajšie, vnútorné) dotyčnice dvoch kružníc.
d) Štvoruholníky a mnohouholníky
vrchol, strana *(ako vzdialenosť, ako úsečka),* uhlopriečka, uhol, konvexný štvoruholník, rovnobežník, kosoštvorec, obdĺžnik, štvorec, lichobežník, rovnoramenný lichobežník, základňa a rameno lichobežníka, výška rovnobežníka a lichobežníka, plošný obsah rovnobežníka a lichobežníka, konvexné, nekonvexné a pravidelné mnohouholníky, obsah mnohouholníka.

Vlastnosti a vzťahy:
a) Lineárne útvary
- Súhlasné uhly pri dvoch rovnobežkách sú rovnaké,
- striedavé uhly pri dvoch rovnobežkách sú rovnaké,
- súčet susedných uhlov je 180°,
- vrcholové uhly sú rovnaké.

b) Trojuholník
- Trojuholníková nerovnosť,
- súčet vnútorných uhlov trojuholníka,
- oproti väčšej (menšej) strane leží väčší (menší) uhol, oproti rovnakým stranám ležia rovnaké uhly,
- delenie ťažníc ťažiskom,
- priesečník osí strán je stred opísanej kružnice, priesečník osí uhlov je stred vpísanej kružnice,
- vyjadrenie obsahu trojuholníka pomocou
  - dĺžky strany a k nej príslušnej výšky,
  - dĺžky dvoch strán a sínusu uhla týmito stranami zovretého,
- Pytagorova veta, goniometria pravouhlého trojuholníka *(pozri 2.5. Goniometrické funkcie),*
- vyjadrenie kosínusov uhlov trojuholníka pomocou dĺžok strán (kosínusová veta),
- $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}, \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c}, \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a}{c}$ (sínusová veta),
- zhodné a podobné trojuholníky, vety o zhodnosti (sss, sus, usu, Ssu) a podobnosti (sss, sus, uu) trojuholníkov, Euklidove vety,
- vzťah medzi pomerom podobnosti dvoch trojuholníkov a

- dĺžkami odpovedajúcich si úsečiek,
- veľkosťami odpovedajúcich si uhlov,
- ich plošnými obsahmi.

c) Kružnica a kruh

- Kružnica je jednoznačne určená stredom a polomerom, resp. tromi svojimi bodmi,
- žiadne tri body kružnice neležia na priamke,
- kolmosť dotyčnice k príslušnému polomeru kružnice,
- Tálesova veta, vzťah medzi stredovým uhlom a obvodovými uhlami príslušnými k danej tetive,
- závislosť vzájomnej polohy kružnice a priamky na polomere kružnice a vzdialenosti jej stredu od priamky,
- dotykový bod dvoch kružníc leží na spojnici stredov kružníc, závislosť vzájomnej polohy dvoch kružníc od vzdialenosti stredov kružníc a ich polomerov,
- vzťahy pre výpočet obvodu a obsahu kruhu, dĺžky kružnicového oblúka a obsahu kruhového výseku.

d) Štvoruholníky a mnohouholníky

- Rovnobežnosť a rovnaká veľkosť protiľahlých strán rovnobežníka,
- rozpoľovanie uhlopriečok v rovnobežníku,
- rovnosť protiľahlých vnútorných uhlov v rovnobežníku,
- súčet susedných uhlov rovnobežníka,
- súčet vnútorných uhlov lichobežníka priľahlých k jeho ramenu,
- uhlopriečky kosoštvorca sú na seba kolmé a rozpoľujú vnútorné uhly,
- zhodnosť uhlopriečok obdĺžnika a štvorca,
- rovnobežník je stredovo súmerný,
- obdĺžnik a štvorec sú súmerné podľa osí strán,
- kosoštvorec je súmerný podľa uhlopriečok,
- rovnoramenný lichobežník je súmerný podľa osi základní,
- pravidelnému *n*-uholníku sa dá vpísať a opísať kružnica,
- v rovnoramennom lichobežníku sú rovnaké uhlopriečky a rovnaké uhly pri základni,
- obsah rovnobežníka vyjadrený pomocou strany a príslušnej výšky, resp. pomocou susedných strán a uhla medzi nimi,
- obsah lichobežníka vyjadrený pomocou výšky a veľkosti základní.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- približne vypočítať obvod a obsah narysovaných trojuholníkov, *n*-uholníkov, kruhov a ich častí,
- vypočítať v trojuholníku, jednoznačne určenom jeho stranami, resp. stranami a uhlami, zvyšné strany a uhly, dĺžky ťažníc, výšok, obvod a obsah,
- rozhodnúť, či sú dva trojuholníky zhodné alebo podobné,
- vlastnosti zhodnosti a podobnosti použiť vo výpočtoch,
- vypočítať obvod a obsah kruhu a kruhového výseku,
- rozhodnúť o vzájomnej polohe
  - priamky a kružnice,
  - dvoch kružníc, ak pozná ich polomery a vzdialenosť stredov,
- vypočítať plošný obsah rovnobežníka, lichobežníka, resp. rozkladom na trojuholníky aj obsah iných mnohouholníkov,
- vypočítať uhol medzi uhlopriečkami, resp. medzi uhlopriečkou a stranou, v pravidelnom mnohouholníku.

3.2 Analytická geometria v rovine

Obsah

Pojmy:

(karteziánska) súradnicová sústava na priamke (číselná os) a v rovine, súradnice bodu, všeobecná rovnica priamky, smernica priamky, smernicový tvar rovnice priamky, rovnica kružnice, vektor, umiestnenie vektora, súradnice vektora, vektor opačný k danému vektoru, nulový vektor, súčet a rozdiel dvoch vektorov, násobok vektora číslom, dĺžka vektora, skalárny súčin vektorov, parametrické rovnice priamky, smerový a normálový vektor priamky.

Vlastnosti a vzťahy:

- Vyjadrenie vzdialenosti dvoch bodov pomocou ich súradníc,
- vzťah medzi smernicami dvoch rovnobežných, resp. kolmých priamok,
- vzťah medzi koeficientmi všeobecných rovníc dvoch rovnobežných, resp. kolmých priamok,
- aspoň jeden vzťah alebo postup pre výpočet
  - uhla dvoch priamok *(napr. pomocou skalárneho súčinu, kosínusovej vety alebo smerníc)*,
  - vzdialenosti bodu od priamky,
- geometrická interpretácia súčtu dvoch vektorov a násobku vektora reálnym číslom a ich vyjadrenie pomocou súradníc daných vektorov,
- body A, B a C ležia na jednej priamke, ak jeden z vektorov $B - A$ a $C - A$ je násobkom druhého,
- vzťah medzi smerovými vektormi dvoch rovnobežných priamok,
- vzdialenosť dvoch bodov ako dĺžka vektora,
- kolmosť dvoch priamok a jej vzťah so skalárnym súčinom ich smerových vektorov,
- vyjadrenie skalárneho súčinu vektorov pomocou dĺžok vektorov a kosínusu ich uhla (resp. vyjadrenie kosínusu uhla dvoch vektorov pomocou ich skalárneho súčinu a ich dĺžok), vyjadrenie skalárneho súčinu vektorov pomocou ich súradníc,
- vzťah medzi koeficientmi všeobecnej rovnice priamky a normálovým vektorom priamky.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- zostrojiť (v danej súradnicovej sústave) obrazy bodov, ak pozná ich súradnice a určiť súradnice daných bodov,
- vypočítať súradnice stredu úsečky, resp. bodu, ktorý úsečku rozdeľuje v danom pomere,
- napísať analytické vyjadrenie priamky
  - prechádzajúcej dvoma danými bodmi,
  - prechádzajúcej daným bodom rovnobežne s danou priamkou,
  - prechádzajúcej daným bodom kolmo na danú priamku,
- určiť vzájomnú polohu dvoch priamok (ak sú dané ich rovnice) a nájsť súradnice ich prípadného priesečníka,
- vypočítať
  - vzdialenosť dvoch bodov,
  - vzdialenosť bodu od priamky,
  - vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok,
  - obsah trojuholníka určeného jeho vrcholmi,
  - uhol dvoch priamok,
- napísať rovnicu kružnice
  - ak pozná jej stred a polomer,
  - v tvare $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$, ak pozná tri body, ktorými kružnica prechádza,
- určiť z rovnice kružnice jej stred a polomer,

- opísať v súradnicovej sústave pomocou rovníc a nerovníc úsečku, kružnicu, polrovinu a kruh,
- rozhodnúť o vzájomnej polohe
  - priamky a kružnice,
  - dvoch kružníc,

  ak pozná ich rovnice,
- pri riešení planimetrických úloh používať analytickú metódu, t. j. vie
  - vhodne si zvoliť súradnicovú sústavu a algebraicky spracovať zadanie,
  - pomocou vedomostí z algebry a poznatkov o vektoroch algebraicky vyriešiť úlohu,
  - algebraický výsledok interpretovať v geometrickom kontexte úlohy.

3.3 Množiny bodov daných vlastností a ich analytické vyjadrenie

Obsah

Pojmy:

množina bodov danej vlastnosti.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- geometricky opísať, načrtnúť a nájsť (v danej alebo vhodne zvolenej súradnicovej sústave) analytické vyjadrenie množiny bodov s konštantnou vzdialenosťou od
  - bodu,
  - priamky,
  - kružnice,
- geometricky opísať a načrtnúť množiny bodov,
  - z ktorých vidieť danú úsečku pod daným uhlom,
  - ktoré majú rovnakú vzdialenosť od
    - dvoch bodov,
    - dvoch rovnobežných priamok,
    - dvoch rôznobežných priamok,
- geometricky opísať a načrtnúť množiny bodov, ktoré majú
  - od daného bodu vzdialenosť menšiu (väčšiu) ako dané kladné číslo,
  - od danej priamky vzdialenosť menšiu (väčšiu) ako dané kladné číslo,
  - od jedného bodu väčšiu vzdialenosť ako od druhého bodu,
  - od jednej danej priamky väčšiu vzdialenosť ako od druhej danej priamky,
- znázorniť množinu bodov [*x*, *y*], pre ktoré platí
  - $y * f(x)$, kde $*$ je jeden zo znakov $<, \leq, \geq, >$ a f je predpis funkcie, ktorej graf vie žiak znázorniť *(pozri 2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti)*,
  - $ax + by + c * 0$,

  a v jednoduchých prípadoch aj množinu bodov [*x*, *y*], ktorá je opísaná sústavou dvoch z predchádzajúcich nerovníc *(pozri tiež 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy)*,
- tieto množiny bodov použiť pri riešení jednoduchých konštrukčných úloh *(pozri 3.5 Konštrukčné úlohy)*.

3.4 Zhodné a podobné zobrazenia

Obsah

Pojmy:

zhodné zobrazenie, osová súmernosť, os súmernosti, posunutie, stredová súmernosť, stred súmernosti, otočenie, stred otočenia, orientovaný uhol a jeho veľkosti, uhol otočenia, osovo a stredovo súmerný útvar, podobné zobrazenie, pomer podobnosti, rovnoľahlosť, stred a koeficient rovnoľahlosti, samodružný bod.

Vlastnosti a vzťahy:

- Stredová súmernosť je jednoznačne určená stredom súmernosti, resp. dvoma odpovedajúcimi si bodmi,
- osová súmernosť je jednoznačne určená osou súmernosti, resp. dvoma odpovedajúcimi si bodmi,
- otočenie je jednoznačne určené stredom a uhlom otáčania,
- posunutie je jednoznačne určené vektorom posunutia, resp. dvoma odpovedajúcimi si bodmi,
- vzťah medzi orientovaným uhlom a jeho veľkosťami,
- rovnobežník je stredovo súmerný,
- obdĺžnik a štvorec sú súmerné podľa osí strán,
- kosoštvorec je súmerný podľa uhlopriečok,
- rovnoramenný lichobežník je súmerný podľa osi základní,
- nech A, B sú dva osovo súmerné body podľa priamky p, potom AB je kolmá na p a stred AB leží na p,
- priamka a jej obraz v posunutí sú rovnobežné,
- rovnoľahlosť je jednoznačne určená stredom a koeficientom rovnoľahlosti, dvoma vhodne zvolenými dvojicami odpovedajúcich si bodov,
- dve rovnoľahlé priamky sú rovnobežné,
- každé dve nerovnaké rovnobežné úsečky sú rovnoľahlé (dvoma spôsobmi),
- každé dve kružnice s rôznym polomerom sú si podobné (sú rovnoľahlé),
- vonkajšie (vnútorné) spoločné dotyčnice dvoch kružníc sa pretínajú v strede rovnoľahlosti,
- vzťah medzi pomerom podobnosti dvoch útvarov a
    - dĺžkami zodpovedajúcich si úsečiek,
    - veľkosťami zodpovedajúcich si uhlov,
    - ich plošnými obsahmi.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- zobraziť daný bod (útvar, graf) v danom zhodnom alebo podobnom zobrazení,
- rozhodnúť, či je daný útvar osovo (stredovo) súmerný,
- napísať súradnice bodu (rovnicu priamky, úsečky, kružnice), ktorý je obrazom daného bodu (danej priamky, úsečky, kružnice)
    - v súmernosti podľa začiatku súradnicovej sústavy,
    - v súmernosti podľa niektorej súradnicovej osi alebo podľa priamky $y = x$,
    - v posunutí,
- zostrojiť
    - stredy rovnoľahlosti dvoch daných kružníc,
    - obraz daného útvaru v danom zhodnom zobrazení alebo rovnoľahlosti, resp. útvar podobný s daným útvarom, pri danom pomere podobnosti.

3.5 Konštrukčné úlohy

Obsah

Pojmy:

rozbor, náčrt, konštrukcia, postup konštrukcie.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- zdôvodniť postup konštrukcie, t. j. urobiť rozbor jednoduchých konštrukčných úloh, pričom vie použiť

- nasledujúce základné konštrukcie *(na ktoré sa môže pri opise postupu zložitejších konštrukčných úloh odvolávať bez toho, aby ich podrobne rozpisoval)*:
  - rovnobežku s danou priamkou daným bodom,
  - rovnobežku s danou priamkou v predpísanej vzdialenosti,
  - os úsečky, os uhla,
  - priamku, ktorá prechádza daným bodom a zviera s danou priamkou daný uhol,
  - úsečku dĺžky $\frac{ab}{c}$ (pomocou podobnosti), kde a, b, c sú dĺžky narysovaných úsečiek,
  - rozdeliť úsečku v danom pomere,
  - trojuholník určený:
    - tromi stranami,
    - dvoma stranami a uhlom,
    - dvoma uhlami a stranou,
  - kružnicu
    - trojuholníku opísanú,
    - do trojuholníka vpísanú,
  - dotyčnicu kružnice
    - v danom bode kružnice,
    - z daného bodu ležiaceho mimo kružnice,
    - rovnobežnú s danou priamkou,
  - stredy rovnoľahlosti dvoch kružníc a spoločné dotyčnice dvoch kružníc,
  - obraz daného bodu, úsečky, priamky, kružnice v danom zhodnom zobrazení, resp. v rovnoľahlosti *(pozri 3. 4 Zhodné a podobné zobrazenia),*
  - množiny bodov daných vlastností, uvedené v prvej a druhej odrážke v *3.3 Množiny bodov daných vlastností a ich analytické vyjadrenie,*
  - množiny bodov daných vlastností,
- pri kreslení náčrtu, pri rozbore úlohy rozlíšiť jednotlivé možnosti zadania *(napr. „výška leží v trojuholníku“ a „výška je mimo trojuholníka“),*
- na základe vykonaného (daného) rozboru napísať postup konštrukcie,
- uskutočniť konštrukciu danú opisom,
- určiť počet riešení v prípade číselne zadaných úloh.

4 STEREOMETRIA

4.1 Základné spôsoby zobrazovania priestoru do roviny

Obsah

Pojmy:

premietanie (voľné rovnobežné premietanie), priemet bodu, priestorového útvaru do roviny.

Vlastnosti a vzťahy:

- Voľné rovnobežné premietanie zachováva deliaci pomer a rovnobežnosť.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- použiť vlastnosti voľného rovnobežného premietania pri zobrazovaní kocky, pravidelných hranolov.

4.2 Súradnicová sústava v priestore

Obsah

Pojmy:

(karteziánska) sústava súradníc v priestore, bod a jeho súradnice, vzdialenosť bodov.

Vlastnosti a vzťahy:

- Vyjadrenie vzdialenosti dvoch bodov pomocou ich súradníc.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- zostrojiť (v danej súradnicovej sústave) obrazy bodov, ak pozná ich súradnice a určiť súradnice daných bodov,
- určiť súradnice stredu úsečky,
- špeciálne vo vhodne zvolenej súradnicovej sústave opísať vrcholy daného kvádra.

4.3 Lineárne útvary v priestore – polohové úlohy

Obsah

Pojmy:

bod, priamka a rovina v priestore, rovnobežné, rôznobežné a mimobežné priamky, rovnobežnosť a rôznobežnosť priamky a roviny, rovnobežné a rôznobežné roviny, priesečnica dvoch rovín, rez telesa rovinou.

Vlastnosti a vzťahy:

- Rovnobežné (rôznobežné) priamky ležia v jednej rovine, mimobežné priamky neležia v jednej rovine,
- priesečnice roviny s dvoma rovnobežnými rovinami sú rovnobežné.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- opísať možnosti pre vzájomné polohy ľubovoľných dvoch lineárnych útvarov,
- rozhodnúť o vzájomnej polohe dvoch lineárnych útvarov pomocou ich obrazu vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- zostrojiť vo voľnom rovnobežnom priemete jednoduchého telesa (kocky, resp. hranola) priesečník priamky (určenej dvoma bodmi ležiacimi v rovinách stien kocky, resp. hranola) s rovinou steny daného telesa,
- zostrojiť rovinný rez kocky, kvádra rovinou určenou tromi bodmi ležiacimi v rovinách stien, z ktorých aspoň dva ležia v tej istej stene daného telesa.

4.4 Lineárne útvary v priestore – metrické úlohy

Obsah

Pojmy:

uhol dvoch priamok, kolmosť priamok a rovín, priamka kolmá k rovine, uhol dvoch rovín, kolmý priemet bodu a priamky do roviny, vzdialenosť dvoch lineárnych útvarov (dvoch bodov, bodu od roviny, bodu od priamky, vzdialenosť rovnobežných priamok, priamky a roviny s ňou rovnobežnej, vzdialenosť rovnobežných rovín), uhol priamky s rovinou.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- na zobrazených telesách označiť
  - úsečky, ktorých skutočná veľkosť predstavuje vzdialenosť daných lineárnych útvarov,
  - uhly, ktorých skutočná veľkosť predstavuje uhol daných lineárnych útvarov.

4.5 Telesá

Obsah

Pojmy:

teleso, mnohosten, vrchol, hrana, stena, kocka, sieť kocky, hranol, kolmý a pravidelný hranol, kváder, rovnobežnosten, ihlan, štvorsten, pravidelný štvorsten, podstava, výšky v štvorstene, guľa, valec, kužeľ, objemy a povrchy telies.

Vlastnosti a vzťahy:

- Vzťahy pre výpočty objemov a povrchov telies.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- rozhodnúť, či daná sieť je sieťou telesa daného obrazom vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- načrtnúť sieť telesa daného obrazom vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- riešiť úlohy, ktorých súčasťou je výpočet objemu, resp. povrchu kocky, kvádra, pravidelného kolmého hranola, pravidelného ihlana, gule, valca, kužeľa a vie pri tom nájsť a aktívne použiť vzťahy pre výpočet objemov a povrchov telies potrebné pre vyriešenie úlohy.

5 KOMBINATORIKA, PRAVDEPODOBNOSŤ A ŠTATISTIKA

5.1 Kombinatorika a pravdepodobnosť

Obsah

Pojmy:

(kombinatorické) pravidlo súčtu, (kombinatorické) pravidlo súčinu, permutácie a permutácie s opakovaním, variácie a variácie s opakovaním, kombinácie, faktoriál, kombinačné číslo, Pascalov trojuholník, pravdepodobnosť, doplnková pravdepodobnosť, geometrická pravdepodobnosť, náhodný jav, nezávislé javy.

Vlastnosti a vzťahy:

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$,
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, $C_k(n) = \binom{n}{k}$, $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$, $P_n = n!$, $V_k' = n^k$, $P'_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$,
- pre pravdepodobnosť P udalosti A platí $0 \leq P(A) \leq 1$,
- $P(A) + P(A') = 1$, kde A' je doplnková udalosť k udalosti A,

- pravdepodobnosť istej udalosti je 1,
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, ak *A*, *B* sú nezávislé javy,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- riešiť jednoduché kombinatorické úlohy
  - vypisovaním všetkých možností, pričom
    - vie vytvoriť systém (strom logických možností) na vypisovanie všetkých možností (ak sa v tomto strome vyskytujú niektoré možnosti viackrát, vie určiť násobnosť ich výskytu),
    - dokáže objaviť podstatu daného systému a pokračovať vo vypisovaní všetkých možností,
    - na základe vytvoreného systému vypisovania všetkých možností určiť (pri väčšom počte možností algebraickým spracovaním) počet všetkých možností,
  - použitím kombinatorického pravidla súčtu a súčinu,
  - využitím vzťahov pre počet kombinácií, variácií, variácií s opakovaním, permutácií a permutácií s opakovaním,
- použiť pri úprave výrazov rovnosti uvedené v časti *Vlastnosti a vzťahy (pozri 1.2 Čísla, premenné a výrazy),*
- rozhodnúť
  - o závislosti javov *A, B,* ak pozná *P(A), P(B)* a $P(A \cap B)$,
  - v jednoduchých prípadoch o správnosti použitia rovnosti $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$,
- riešiť úlohy na pravdepodobnosť, založené na
  - hľadaní pomeru všetkých priaznivých a všetkých možností, resp. všetkých nepriaznivých a všetkých priaznivých možností, ak vie tieto počty určiť riešením jednoduchých kombinatorických úloh,
  - doplnkovej pravdepodobnosti,
  - využití geometrickej pravdepodobnosti.

5.2 Štatistika

Obsah

Pojmy:

diagram – graf (stĺpcový, obrázkový, kruhový, lomený, spojitý, histogram), základný súbor, výberový súbor, rozdelenie, modus, medián, aritmetický priemer (aj viac ako dvoch čísel), stredná hodnota, smerodajná odchýlka, rozptyl, triedenie.

Vlastnosti a vzťahy:

- Vzťah pre výpočet rozptylu.

Požiadavky na vedomosti a zručnosti

Žiak vie:

- vypočítať aritmetický priemer daných čísel,
- získavať informácie z rôznych tabuliek (napr. autobusová tabuľka) a diagramov,
- spracovať údaje do vhodných diagramov,
- zistiť v danom súbore modus, medián, strednú hodnotu, priemer,
- pomocou vhodného softvéru zistiť v danom súbore rozptyl, smerodajnú odchýlku a uviesť štatistickú interpretáciu získaných výsledkov,
- uviesť príklad súboru s požadovanými podmienkami na modus, medián, strednú hodnotu, priemer, rozptyl, smerodajnú odchýlku,

- znázorniť a vyhodnotiť namerané hodnoty,
- urobiť triedenie a znázorniť ho.

ÚPRAVY CIEĽOVÝCH POŽIADAVIEK NA VEDOMOSTI A ZRUČNOSTI MATURANTOV Z MATEMATIKY PRE ŽIAKOV SO ZDRAVOTNÝM ZNEVÝHODNENÍM

Žiaci so sluchovým postihnutím

Cieľové požiadavky z matematiky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.

Žiaci so zrakovým postihnutím

Úlohy, ktoré vyžadujú vizuálnu skúsenosť, sa upravujú, nahrádzajú slovným opisom alebo vypúšťajú.

Žiaci s telesným postihnutím

Konštrukčné úlohy sa nahrádzajú slovným opisom jednotlivých krokov konštrukcie (podľa druhu a stupňa telesného postihnutia).

Žiaci s vývinovými poruchami učenia alebo správania

Cieľové požiadavky z matematiky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.
Žiakom s vývinovou poruchou učenia – dyskalkúlia – neodporúčame konať maturitnú skúšku z matematiky.

Žiaci s narušenou komunikačnou schopnosťou

Cieľové požiadavky z matematiky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.

Žiaci chorí a zdravotne oslabení

Cieľové požiadavky z matematiky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.

Žiaci s autizmom alebo ďalšími pervazívnymi vývinovými poruchami

Cieľové požiadavky z matematiky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.

Žiaci s poruchami správania

Cieľové požiadavky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.

Žiaci s poruchou aktivity a pozornosti

Cieľové požiadavky pre túto skupinu žiakov sú totožné s cieľovými požiadavkami pre intaktných žiakov.

Autori:

RNDr. Pavol Černek,

RNDr. Marián Hanula

CSc., RNDr. Vladimír Jodas

doc. RNDr. Zbyněk Kubáček, CSc.